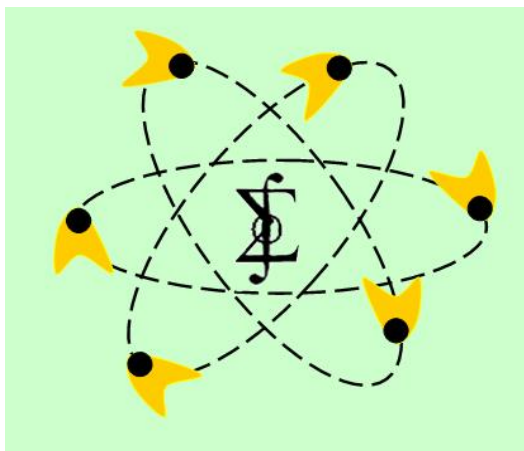


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

**В.А. АМБАРЦУМЯН, Е.А. АНДРЮЩЕНКО,
К.В. БУХЕНСКИЙ, Е.А. ДВОРЕЦКОВА,
А.Б. ДЮБУА, М.А. ЗИЛОТОВА,
С.Н. МАШИНА, А.С. САФОШКИН**

**СТУДЕНЧЕСКИЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ**
Часть 1



Рязань 2014

Министерство образования и науки Российской Федерации

Рязанский государственный радиотехнический университет

**В.А. АМБАРЦУМЯН, Е.А. АНДРЮЩЕНКО,
К.В. БУХЕНСКИЙ, Е.А. ДВОРЕЦКОВА,
А.Б. ДЮБУА, М.А. ЗИЛОТОВА,
С.Н. МАШИНА, А.С. САФОШКИН**

СТУДЕНЧЕСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

Часть 1

Учебное пособие

Рязань 2014

УДК 512.8/514.122/517

Студенческие математические олимпиады. Часть 1: учеб. пособие / В.А. Амбарцумян, Е.А. Андрющенко, К.В. Бухенский, Е.А. Дворецкова, А.Б. Дюбуа, М.А. Зилотова, С.Н. Машнина, А.С. Сафошкин; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2014. – 128 с.

Представлен подробный разбор «типовых» олимпиадных задач по линейной алгебре, аналитической геометрии, введению в математический анализ и дифференциальному исчислению функций одной переменной с элементами теории.

Предназначено для индивидуальной и факультативной работы студентов, для подготовки к математическим олимпиадам.

Ил. 21. Библиогр.: 22 назв.

Матрицы, определители, СЛАУ, векторы, предел последовательности, предел функции, производная, исследование функций с помощью производных

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета (доц., канд. физ.-мат. наук Г.С. Лукьянова)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Студенческие предметные олимпиады по своей сути преследуют те же цели, что и олимпиады школьные. К ним мы относим: выявление и развитие у обучающихся способностей к наукам, интереса к научной деятельности; создание условий для интеллектуального развития; поддержку одаренных студентов, в том числе содействие им в профессиональной ориентации и продолжении образования; пропаганду научных знаний и т.д.

Вместе с этим имеются существенные отличия, главным из которых, на наш взгляд, является, то, что всё бремя подготовки и организации олимпиады практически полностью ложится на вуз, проводящий или командирующий команду студентов на эту олимпиаду. Отрадно сознавать, что в непростое для образования время существуют учебные заведения, организующие студенческие математические олимпиады на самом высоком уровне: Московский физико-технический институт (МФТИ), Ярославский государственный технический университет (ЯрГТУ), Уфимский государственный авиационно-технический университет (УГАТУ) и многие другие. Рязанский государственный радиотехнический университет также принимает участие в этом важном, на наш взгляд, процессе. Мы проводим в Рязани 2 этапа Всероссийской студенческой математической олимпиады (внутривузовский и региональный), через которые проходят более сотни студентов. По результатам этих этапов формируется команда РГРТУ, которая участвует в III (заключительном) туре олимпиады. На самом деле этих туров много – они могут называться по-разному: например, в МФТИ проводится олимпиада по прикладным математике и физике. В последнее время стали модными интернет-олимпиады. Каждый вуз подходит к организации мероприятия творчески: олимпиады могут проводиться отдельно для студентов различных курсов (младшие и старшие) и специальностей (физико-математические, технические, экономические). Естественно, для каждой группы должен быть подобран «свой» набор задач и выработаны «свои» критерии оценки работы. Это безусловный плюс: каждый участник олимпиады чувствует, что его увлече-

ние математикой не пропало даром и что, проявив должный уровень старания, ему можно вполне рассчитывать на призовой диплом и даже на «ценный приз».

Есть ещё одна, наряду с финансовой, проблема студенческих олимпиад – методическая. Кроме классических учебников В.А. Садовниченко и Ф.Д. Берковича (отдельные задачи мы «вчистую» скопировали из этих изданий), ставших по сути библиографической редкостью, нам неизвестны пособия, доступные студентам, обеспечивающие качественную самостоятельную подготовку к серьёзным олимпиадам. Конечно же, ряд университетов (МФТИ, ЯрГТУ, УГАТУ и пр.) издаёт превосходные сборники задач, которые предлагались для решения студентам в разные годы, но, к сожалению, они, во-первых, малодоступны для широкого круга читателей, и, во-вторых, на наш взгляд, в них отсутствует «направляющий методический вектор», т.е. кроме банального «разбора решения» там ничего больше нет.

Мы попытались немного исправить эту проблему. Анализируя задачи студенческих олимпиад последних десятилетий, приводя свои и заимствуя задачи, которые предлагаются студентам «продвинутых» вузов, мы предлагаем пособие «Студенческие математические олимпиады», которое может оказаться полезным для студентов, желающих глубже самостоятельно изучить математику и подготовиться к олимпиаде. Наше пособие содержит практически всю программу высшей математики для технических университетов. Конечно же, это разбиение на «разделы» весьма условно: например, есть задачи в разделе «пределы», которые вполне могли бы оказаться в «рядах» или «интегралах».

Пособие состоит из трёх частей: первые две представляют собой подробный разбор «типовых» олимпиадных задач с элементами теории. Третья часть предназначена для самостоятельного решения. В ней собраны задачи, которые предлагались на олимпиадах РГРТУ и в других вузах.

Авторы надеются на широкое обсуждение данного пособия в научных кругах и будут признательны за критические замечания и пожелания.

ГЛАВА 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Линейная алгебра

Будем считать, что читатель свободно владеет арифметическими операциями с матрицами и определителями, умеет перемножать векторы разными способами и хорошо знаком с кривыми и поверхностями первого и высших порядков. Поэтому не будем останавливаться на известных положениях программ технических вузов и лишь обратим внимание на особенности, которые, как правило, не освещаются на лекциях из-за недостатка времени, но часто предлагаются на олимпиадах. Также мы сохранили и общепринятые обозначения.

1. Со степенью матрицы связаны следующие определения, характеризующие ее свойства. Квадратная матрица A называется *идемпотентной*, если $A^2 = A$; *инволютивной*, если $A^2 = E$ (единичная матрица того же размера); *периодической*, если $A^k = E$ (число k – период матрицы); *нильпотентной*, если $A^k = \theta$ (θ – нулевая матрица того же размера, число k – показатель nilпотентности матрицы A).

Пример

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} -26 & -18 & -27 \\ 21 & 15 & 21 \\ 12 & 8 & 13 \end{pmatrix} \text{ – идемпотентная, так как}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -26 & -18 & -27 \\ 21 & 15 & 21 \\ 12 & 8 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -26 & -18 & -27 \\ 21 & 15 & 21 \\ 12 & 8 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 & -18 & -27 \\ 21 & 15 & 21 \\ 12 & 8 & 13 \end{pmatrix} = A.$$

Матрица

$$B = \begin{pmatrix} -53 & -36 & -54 \\ 42 & 29 & 42 \\ 24 & 16 & 25 \end{pmatrix} - \text{инволютивная и периодическая, так}$$

как

$$B^2 = \begin{pmatrix} -53 & -36 & -54 \\ 42 & 29 & 42 \\ 24 & 16 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -53 & -36 & -54 \\ 42 & 29 & 42 \\ 24 & 16 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Матрица

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{нильпотентная (с показателем 3), так как}$$

$$C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \theta.$$

2. Со следом квадратной матрицы – суммой ее главных диагональных элементов – $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ связаны следующие свойства.

1. $\text{tr}(A+B) = \text{tr } A + \text{tr } B.$
2. $\text{tr } A = \text{tr } A^T.$
3. $\text{tr}(A^T B) = \text{tr}(B^T A) = \text{tr}(AB^T) = \text{tr}(BA^T).$
4. $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BCA) = \text{tr}(CAB).$
5. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij} = \text{tr}(AB^T).$

6. Если x и y – столбцы размерами $n \times 1$, то

$$\text{tr}(Ax x^T) = x^T A x \text{ и } \text{tr}(x y^T) = x^T A x.$$

7. Если λ_i – корни характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$, то $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

3. При решении многих задач с матрицами удобно переходить к блочным матрицам, т.е. к матрицам, разделенным горизонтальными линиями на блоки (клетки). Это иногда позволяет избежать громоздких вычислений. Поясним на примере.

Пример

Найдём произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Разобьём матрицы на блоки:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} E & \theta \\ \hline D & E \end{array} \right), \quad B = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} E & E \\ \hline \theta & F \end{array} \right).$$

Операции с блочными матрицами аналогичны операциям с обычными матрицами. Перемножая, получаем

$$AB = \left(\begin{array}{c|c} E & \theta \\ \hline D & E \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} E & E \\ \hline \theta & F \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} E & E \\ \hline D & D+F \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 4 & 10 & 12 \end{array} \right).$$

4. При вычислении определителей иногда полезно использовать, кроме традиционных, следующие приёмы:

1) рассмотреть определитель как полином от некоторой переменной и найти его корни. Тогда определитель есть

произведение линейных множителей коэффициента при старшей степени полинома, который обычно легко найти;

2) можно попробовать выразить определитель порядка n через определители низших порядков. Если рекуррентное соотношение имеет вид

$$D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}, \quad n > 2,$$

то определитель находится в виде

$$D_n = C_1 a^n + C_2 b^n,$$

где a и b – корни уравнения $x^2 - px - q = 0$, а коэффициенты C_1 и C_2 вычисляются непосредственно подставлением в формулу значения D_1 и D_2 . Если $a = b$, то $D_n = a^n ((n-1)C_1 + C_2)$;

3) если ко всем элементам определителя прибавить одно и то же число, то он увеличится на произведение этого числа на сумму алгебраических дополнений всех элементов определителя. Это свойство неплохо использовать для получения «хорошего» определителя;

4) использовать свойство

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Тогда можно представить искомый определитель в виде произведения двух определителей;

5) дифференцирование определителя удобно проводить по формуле

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \dots & f_{kn}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \dots & f'_{kn}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix};$$

б) объём n -мерного параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}_i = (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in})$ в ортонормированном базисе, равен определителю

$$V = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i1} & \dots & a_{i1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если n -мерный параллелепипед построен на векторах $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$, то его объём равен

$$V^2 = \begin{vmatrix} (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) & (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & \dots & (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n) \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) & \dots & (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n) & (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_n) & \dots & (\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n) \end{vmatrix}.$$

Задачи

1.1. Пусть A – матрица $n \times n$ такая, что $A^2 = A$, E – единичная $n \times n$ матрица. Доказать, что определитель матрицы $E - A$ равен 0 или 1.

Решение

Первый способ

Обозначим рассматриваемую матрицу $B = E - A$. Возводя в квадрат матрицу B и используя равенство $A^2 = A$ из условия задачи, получаем:

$$B^2 = (E - A)^2 = E - 2A + A^2 = E - 2A + A = E - A = B. \quad \text{Если}$$

$B^2 = B$, то определитель матрицы B равен определителю матрицы B^2 , то есть $(\det B)^2 = \det B$.

Это возможно лишь в том случае, если $\det B = \det(E - A) = 0$ или $\det B = \det(E - A) = 1$. Что и требовалось доказать.

Второй способ

По условию $A^2 = A$. Пусть $Y = E - A$, $x = \det Y$. Тогда $Y^2 = (E - A)(E - A) = EE - EA - AE + (-A)(-A) = E - 2A + A^2 = E - 2A + A = E - A = Y$. Тогда, поскольку определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей матриц, то $\det Y^2 = \det Y \cdot \det Y = \det Y$, то есть $x^2 = x$. Отсюда $x = 0$ или $x = 1$.

1.2. Матрицы A и B таковы, что $\dim A = 4 \times 2$, $\dim B = 2 \times 4$ и

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти BA .

Решение

Представим матрицы A и B в виде блочных матриц A_1, A_2, B_1, B_2 :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = (B_1 \mid B_2).$$

Тогда

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} (B_1 \mid B_2) = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 \end{pmatrix}.$$

Откуда следует, что $A_1 B_1 = A_2 B_2 = E_2$ и $A_1 B_2 = A_2 B_1 = -E_2$.
Следовательно, $A_1 = (B_1)^{-1}$, $B_2 = -(A_1)^{-1}$, $A_2 = (B_2)^{-1} = -A_1$.

Окончательно:

$$BA = (B_1 \mid B_2) \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = A_1 B_1 + A_2 B_2 = 2E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.3. Матрицы A и B таковы, что $AB + A + B = \theta$. Доказать, что $AB = BA$.

Решение

Матрицы $A + E$ и $B + E$ перестановочны, так как

$$(A + E)(B + E) = AB + A + B + E = E,$$

следовательно,

$$(A + E)(B + E) = (B + E)(A + E) = BA + A + B + E = E,$$

Откуда следует, что $AB = BA$.

1.4. Найти ранг матрицы $A = \|a_{ij}\|$ размером $n \times n$ ($n \geq 3$), где $a_{ij} = i + j - 2ij$.

Решение

Первый способ

Заметим, что

$$a_{1j} = 1 + j - 2j = 1 - j, \quad a_{2j} = 2 + j - 4j = 2 - 3j,$$

$$a_{3j} = 3 + j - 6j = 3 - 5j = -(1 - j) + 2(2 - 3j) = -a_{1j} + 2a_{2j}.$$

Покажем, что

$$\begin{aligned}
 a_{i+2,j} &= -a_{ij} + 2a_{i+1,j}; a_{i+1,j} = i+1+j-2(i+1)j = i+1-j-2ij, \\
 a_{i+2,j} &= i+2+j-2(i+2)j = i+2-4j-2ij = -(i+j-2ij) + \\
 &+ 2(i+1-i-2ij) = -a_{i,j} + 2a_{i+1,j}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, каждая строка, начиная с третьей, является линейной комбинацией двух предыдущих, следовательно, и первых двух. Так как первые две строки линейно независимы, то ранг равен 2.

Второй способ

$a_{ij} = i + j - 2ij$, $a_{i,j+1} = i + j + 1 - 2i(j+1) = a_{ij} + 1 - 2i$. Так как $(1-2i)$ не зависит от j , это означает, что в каждой строке матрицы стоит арифметическая прогрессия.

При элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется. После вычитания из $j+1$ -го столбца j -го столбца, при $j = n-1, n-2, \dots, 1$, все столбцы, начиная со второго, становятся одинаковыми. Тогда при повторе этой процедуры еще раз все столбцы, начиная с 3-го, обнуляются. Отсюда ранг матрицы не больше 2.

Ответ: 2.

1.5. Может ли при элементарных преобразованиях матрицы A измениться ранг матрицы A^2 ?

Решение

Первый способ

Матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ элементарными преобразованиями приводится к матрице $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. При этом $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ранг изменился.

Второй способ

Если ранг может измениться, то нужно указать матрицу A . Естественно искать матрицу A среди наиболее простых квадратных матриц с положительным рангом. Поэтому ищем в качестве матрицы A квадратную матрицу второго порядка ранга 1.

Потребуем, чтобы $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $r(A^2) = 0$. Пусть после некоторого элементарного преобразования матрицы A получилась матрица A' . Тогда $r(A') = r(A) = 1$, так как при элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется. Потребуем, чтобы $r((A')^2) > 0$.

Для этого достаточно потребовать, чтобы $(A')^2 \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Если взять матрицу A , состоящую из одной единицы и трех нулей, то ее ранг равен 1.

Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, то $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Не подходит.

Если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, то $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Подошло.

Элементарные преобразования матрицы — например прибавление к одной строке (или столбцу) другой строки (другого столбца), умноженной (умноженного) на число.

Прибавим к первому столбцу матрицы A второй столбец. Получится матрица $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Нулей стало меньше, поэтому вряд ли $(A')^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Действительно, $(A')^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A' \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$r((A')^2) = 1 > 0$. Ранг матрицы A^2 изменился (увеличился на единицу).

Ответ: да, может.

1.6. Существует ли ненулевая матрица A размером $n \times n$ с действительными компонентами такая, что для любой $n \times n$ -матрицы X матрица $E - XA$ невырожденная? (Здесь E – единичная $n \times n$ -матрица.)

Решение

Первый способ

Рассмотрим матрицу как линейный оператор. Так как $A \neq 0$, то существует такой вектор u , что справедливо равенство $Au = v, v \neq 0$. Ясно, что $u \neq 0$. Возьмем какой-либо линейный оператор B , который переводит вектор v в вектор u : $Bv = u$. Тогда справедливо равенство $BAu = v$. Отсюда следует, что $(E - BA)u = 0$. Значит, матрица $E - BA$ - вырожденная.

Второй способ

Пусть $\det A \neq 0, E - XA$ – невырожденная матрица при любой X , то есть ее определитель не равен нулю. Тогда если X – невырожденная, то при $X = A^{-1}$ матрица $E - XA = E - E = 0$ – вырожденная. Следовательно, A – вырожденная матрица. Пусть X – невырожденная матрица. Тогда существует X^{-1} .

Тогда $E - XA = X(X^{-1} - A)$. Для получения противоречия достаточно так подобрать невырожденную матрицу X^{-1} , чтобы матрица (содержимое скобок) $B = X^{-1} - A$ оказалась вырожденной. Для этого достаточно найти такую вырожденную

матрицу B , чтобы матрица $Y = A + B$ оказалась невырожденной. Докажем, что это можно сделать.

Пусть $r(A) = r, r < n$. Рассмотрим вырожденную диагональную матрицу A_1 с r единицами на главной диагонали ($r(A_1) = r$) и вырожденную диагональную матрицу B_1 ранга $n - r$ с $n - r$ единицами там, где стоят нули у матрицы A_1 . Тогда $E = A_1 + B_1$ – невырожденная матрица и существуют невырожденные матрицы S, T такие, что $A = SA_1T$. Тогда $A_1 = S^{-1}AT^{-1}$, $S^{-1}AT^{-1} + B_1 = E$, $S^{-1}A + B_1T = T$, $A + SB_1T = ST$.

Положим $X^{-1} = ST$.

Получим $E - XA = X(ST - A) = X(SB_1T)$ – вырожденная матрица, так как матрица B_1 – вырожденная. Противоречие.

Ответ: такой матрицы A не существует.

1.7. Квадратные матрицы A и B таковы, что $AB = 0$. Что можно сказать о собственных значениях матрицы $E + BA$ (E – единичная матрица)?

Решение

Первый способ

Докажем, что все собственные числа матрицы $E + BA$ равны 1. Пусть x – собственный вектор, соответствующее собственное значение обозначим через λ . Тогда $(E + BA)x = \lambda x$. Отсюда $x + BAx = \lambda x$, $(\lambda - 1)x = BAx$. Пусть $\lambda \neq 1$.

Тогда $x = \frac{1}{\lambda - 1}BAx$. Умножим слева на A , воспользуемся

тем, что $AB = 0$, и получим: $Ax = \frac{1}{\lambda - 1}ABAx = 0$.

Так как $Ax=0$, то $BAx=0$, а значит, $(\lambda-1)x=0$. Но x – собственный вектор, поэтому он не равен нулю. Отсюда получаем, что $\lambda=1$, а это противоречит предположению.

Второй способ

$$AB=0. |E+BA-\lambda E|=0. \lambda - ?$$

$|BA-(\lambda-1)E|=0. |BA|=|B| \cdot |A|=0$. Поэтому $\lambda=1$ является одним из собственных значений матрицы $E+BA$.

Пусть $\lambda-1=\lambda_1$. $(BA)^2=BA BA=B(AB)A=0$. Поэтому, если $|(BA)^2-(\lambda_1 E)^2|=0$, то $|\lambda_1^2 E|=0, (-\lambda_1^2)^n=0, \lambda_1=0$.

Тогда

$$|(BA)^2-(\lambda_1 E)^2|=|(BA-\lambda_1 E)(BA+\lambda_1 E)|=|BA-\lambda_1 E| \cdot |BA+\lambda_1 E|.$$

Значит, если

$$|BA-\lambda_1 E|=0, \text{ то } |(BA)^2-(\lambda_1 E)^2|=0, \lambda_1=\lambda-1=0, \lambda=1.$$

Ответ: все собственные числа матрицы равны 1.

1.8. Пусть матрица A равна: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 32 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^m$, где m -

натуральное число. При каком значении m сумма всех элементов первой строки этой матрицы будет максимальной?

Решение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 32 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 1 & 2m & 2m(17-m) \\ 0 & 1 & -2m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Докажем равенство, используя принцип математической индукции:

1) для $m=1$ равенство выполняется;

2) пусть равенство выполнено для некоторого натурального m .

Рассмотрим его справедливость для $m+1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 32 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{m+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2m & 2m(17-m) \\ 0 & 1 & -2m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 32 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2m+2 & 2m(17-m)+32-4m \\ 0 & 1 & -2m-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2(m+1) & 2(m+1)(17-(m+1)) \\ 0 & 1 & -2(m+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сумма элементов первой строки $s = 1 + 2m + 2m(17-m) = 1 + 36m - 2m^2$. Максимум функции s является (9,163).

1.9. Матрицы A и B размерностей соответственно 3×2 и 2×3 таковы, что $AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу BA .

Решение

Пусть $A' - 2 \times 3$ – матрица такая, что $A'A = E$, и $B' - 3 \times 2$ – матрица такая, что $BB' = E$, где E – единичная 2×2 – матрица. Далее нетрудно проверить, что $(AB)(AB) = 9(AB)$. Тогда $BA = (A'A)(BA)(BB') = A'(AB)(AB)B' = 9(A'A)(BB') = 9E$.

1.10. Дана матрица $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Разрешается любую строку (столбец) поэлементно умножить или разделить на другую

строку (соответственно столбец). Можно ли за несколько таких операций получить матрицу:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение:

а) можно, например, следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4/3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4/3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 4 \\ 3/4 & 4/3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 2 \\ 3/4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3/4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3/4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3/4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix};$$

б) нельзя. Представим все числа в матрице как степени числа 2. Тогда указанные операции сводятся к сложению или вычитанию соответствующих показателей. Составим матрицу из показателей чисел: $\begin{pmatrix} 1 & \log_2 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Определитель этой матрицы при заданных операциях не меняется. Но он не равен 0 и противоположен определителю из показателей матрицы, заданной в пункте «б».

$$\text{1.11. Вычислить } \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение

Приведем определитель к виду:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \text{прибавив к 1-й строке} \\ \text{все строки} \end{matrix}$$

$$= (n-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} (n-1).$$

1.12. Вычислить
$$\begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x \\ x & a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Решение

Вычтем из каждого элемента определителя x . Тогда определитель станет диагональным, а его величина увеличится на сумму алгебраических дополнений диагонального определителя, то есть

$$\begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x \\ x & a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 - x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n - x \end{vmatrix} + x \{ (a_2 - x)(a_3 - x) \dots (a_n - x) + \\ + (a_1 - x)(a_3 - x) \dots (a_n - x) + \dots + (a_1 - x)(a_2 - x) \dots (a_{n-1} - x) \}.$$

Окончательно,

$$\begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x \\ x & a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & a_n \end{vmatrix} = x(a_1 - x)(a_2 - x) \dots (a_n - x) \left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 - x} + \dots + \frac{1}{a_n - x} \right\}.$$

1.13. Вычислить определители, используя их свойства:

$$1) \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos(\alpha + \delta) & \sin(\alpha + \beta) \\ \sin \beta & \cos(\beta + \delta) & \sin(\beta + \delta) \\ \sin \gamma & \cos(\gamma + \delta) & \sin(\gamma + \delta) \end{vmatrix};$$

$$2) \begin{vmatrix} \alpha^2 & (\alpha+1)^2 & (\alpha+2)^2 \\ \beta^2 & (\beta+1)^2 & (\beta+2)^2 \\ \gamma & (\gamma+1)^2 & (\gamma+2)^2 \end{vmatrix}; \alpha, \beta, \gamma, \delta \in R;$$

$$3) \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \beta & \sin \beta \cos \beta & \cos^2 \beta \\ \sin^2 \gamma & \sin \gamma \cos \gamma & \cos^2 \gamma \end{vmatrix};$$

$$4) \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 1 & \alpha & \beta \\ \beta & 1 & \alpha \end{vmatrix}, \text{ где } \alpha \text{ и } \beta - \text{ корни уравнения } x^2 + px + q = 0;$$

$$5) \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix}, \quad \text{ где } \alpha, \beta, \gamma - \text{ корни уравнения}$$

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0.$$

Решение

1. Разложить определитель на сумму, используя формулы синуса и косинуса суммы аргументов.

Ответ: 0.

2. Сначала вычесть 1-ю строку из остальных строк и вынести общие множители за знак определителя.

Ответ: $4(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)(\gamma - \alpha)$.

3. Прибавить к 1-му столбцу 3-й, а затем «сделать» нули в нем.

Ответ: $\sin(\alpha - \beta)\sin(\gamma - \beta)\sin(\gamma - \alpha)$.

4. См. указания к п.5.

Ответ: $1 - p^3 + 3pq - 3q$.

5. К элементам 1-й строки (столбца) прибавить элементы остальных строк (столбцов) и применить формулы Виета. Для

приведенного кубического уравнения они имеют вид:
 $x_1 + x_2 + x_3 = -p$; $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = q$; $x_1x_2x_3 = -r$.

Ответ: $p(p^2 - 3q)$.

1.14. Доказать, что:

$$1) \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix};$$

$$2) \Delta(x) = \begin{vmatrix} 1+x & -x & x \\ x & 1-x & x \\ -x & x & 1+x \end{vmatrix} > 0, \forall x \in R;$$

$$3) \Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^3 & x^2 & x \\ -x & 2x & 3x^2 \end{vmatrix} > 0, \forall x \in R;$$

4) при каких $a, b, c > 0$ имеет место знак равенства в определителе $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \leq 0$.

Решение

1. Разложить определитель слева на сумму.

2. 2-й столбец прибавить к остальным столбцам.

Ответ: $\Delta(x) = 2x^2 + x + 1 > 0, \forall x \in R$.

3. Вынести x за знак определителя 2-го и 3-го столбцов и найти $\max \Delta(x)$.

Ответ: $\Delta(x) = -x^2(x^2 - 1)^2 \leq 0$, при $x = 0$ и $x = \pm 1$.

4. Использовать неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим трех

неотрицательных чисел $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$, учитывая, что равенство имеет место только при $x = y = z$.

Ответ: $\Delta = 3abc - a^3 - b^3 - c^3 \leq 0$, $\Delta = 0$ при $a = b = c$.

1.15. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} x & 1+x & x^2 \\ 1+x & x & x \\ x & 1+x & x \end{vmatrix} < 0$.

Решение

Вынести x из 3-го столбца за знак определителя.

Ответ: $x \in (-\infty; 0,5) \cup (0;1)$.

1.16. Доказать, что для всех допустимых значений x справедливы неравенства:

$$1) \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2x-1 & x & x-1 \\ 3x & 2+x & x \end{vmatrix}^{1/2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}^{1/2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

При каких x выполняется знак равенства?

Решение

Убедиться, что определитель $\Delta(x)$ – многочлен 4-й степени, его корни легко подобрать так, чтобы 2 строки из четырех стали равными. Для определителя коэффициента при x^4 вычислить значение $\Delta(0)$.

Ответ: $\Delta(x) = -(x^2 - 1)(x^2 - 4) \geq 0$, если $1 \leq |x| \leq 2$, $\Delta(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$
при $x = \pm\sqrt{2,5}$.

1.17. Построить графики функций:

$$1) y = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \end{vmatrix}, (a \neq b);$$

$$2) y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+x & 2 & x+3 & 4 \\ 1 & x+3 & x+4 & x+5 \\ 1 & -3 & -4 & -5 \end{vmatrix}.$$

Решение

1. Вычесть вторую строку из остальных строк; при построении графика рассмотреть случаи $a < b$ и $a > b$.

Ответ: парабола $y = (b-a)(x-a)(x-b)$.

2. Вычесть из 2-й и 3-й строк 1-ю.

Ответ: парабола $y = 4x(x+1)$.

1.18. Найти наибольшее и наименьшее значения

определителя $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{vmatrix}$, где a, b, c — косинусы углов некоторого

вектора с осями координат.

Решение

Обозначим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{vmatrix}.$$

Имеем $\Delta = 2abc + 1 - a^2 - b^2 - c^2 = 2abc$, т.к. $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Из неравенства

$$1 = a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2 b^2 c^2} \Rightarrow (abc)^2 \leq \frac{1}{27}. \quad (1)$$

Тогда $|\Delta| = 2|abc| \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}$, т.е. $\Delta = \frac{2\sqrt{3}}{9}$, $\min \Delta = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$. Знакравенства в (1) имеет место только при $a^2 = b^2 = c^2 = \frac{1}{3}$.

Поэтому $\max \Delta$ достигается, когда все косинусы положительны, или два из трех косинусов отрицательны; $\min \Delta$ достигается, когда один из косинусов отрицателен, а два других имеют одинаковые знаки.

1.19. Решить уравнения:

$$1) \begin{vmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \\ a^3 & a^2 & a & 1 \\ a^6 & a^4 & a^2 & 1 \\ a^9 & a^6 & a^3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$3) \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix} = 0;$$

$$4) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & x^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & x^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n - 1 & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0;$$

$$5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-1-x \end{vmatrix} = 0$$

(все a_k , $k = \overline{1, n-1}$ различны);

$$6) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_m \\ a_1 & a_1 + a_2 - x & a_3 & \dots & a_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} + a_{n-x} \end{vmatrix} = 0;$$

$$7) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \end{vmatrix} = 0.$$

Решение

1. См. указание к задаче **1.16**

Ответ: $x_1 = a$, $x_2 = a^2$, $x_3 = a^3$.

2)-7) Определить степени многочленов и применить указание к задаче 1.16.

2. Обозначим $\Delta(x)$ определитель слева. Очевидно, что $\Delta(1)=0$, так как получаем две одинаковые строки; аналогично находим другие корни уравнения $x_2=2, \dots, x_{n-1}=n-1$. Так как $\Delta(x)$ – многочлен $n-1$ степени (хотя сам определитель n -го порядка), а такой многочлен не может иметь более $n-1$ различных корней, то окончательно получаем: $x_k = a_k$, все корни уравнения;

3. $\Delta_{n+1}(x)$, $k = \overline{1, n-1}$ – многочлен $(n+1)$ степени; причем $\Delta_{n+1}(a_k)=0$, $k = \overline{1, n}$, т.е. $x_k = a_k$, $k = \overline{1, n}$ – n корней многочлена. Для нахождения последнего $(n+1)$ -го корня, x_{n+1} прибавим к 1-му столбцу определителя остальные столбцы, все элементы получившегося столбца будут одинаковы и равны $x + \sum_{k=1}^n a_k$, вынося этот общий множитель за знак определителя, получаем, что $x_{n+1} = -\sum_{k=1}^n a_k$.

$$4. x_k = a_k, k = \overline{1, n-1}.$$

$$5. x_k = k-1, k = \overline{1, n-1}.$$

$$6. x_k = a_k, k = \overline{1, n-1}.$$

$$7. x = x_k, k = \overline{1, n}.$$

1.20. Вычислить определители n -го порядка Δ_n , элементы a_{ik} , $i, k = \overline{1, n}$, которых имеют вид:

$$1) a_{ik} = 1 + x_i y_k; 2) a_{ik} = \min(i, k); 3) a_{n,k} = \max(i, k).$$

Решение

1. Вычесть 1-й столбец из остальных столбцов.

Ответ: $\Delta_1 = 1 + x + x + y + 1$, $\Delta_2 = (y_2 - y_1)(x_2 - x_1)$, $\Delta_n = 0$ при $n > 2$.

2. Доказать рекуррентную формулу $\Delta_n = \Delta_{n-1}$, $n \geq 2$.

Ответ: определитель Δ_n с элементами $a_{ik} = \min(i, k)$, $i, k = \overline{1, n}$ имеет вид: $\Delta_n =$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 4 & 4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & (n-1) & n \end{vmatrix}.$$

Вычитая 1-й столбец из остальных столбцов, получаем, что

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

Получили, что $\Delta_n = \Delta_{n-1}$, где Δ_{n-1} – определитель такого же вида, как и Δ_n , но $(n-1)$ -го порядка. Из полученной рекуррентной формулы находим $\Delta_n = \Delta_{n-1} = \Delta_{n-2} = \dots = \Delta_1 = 1$.

Замечание.

Матрицу из элементов Δ_n можно представить в виде произведения $A = A_1 A_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $|A| = |A_1| |A_2|$, причем $|A| = \Delta_n$; $|A_2| = |A_1| = 1$, то $\Delta_n = 1$; $\Delta_n = n$.

3. После упрощения получившийся определитель разложить по элементам n -й строки. В пп.2, 3 матрицу A из элементов определителя можно также представить в виде произведения двух матриц верхней и нижней треугольной, у которых по одну сторону от главной или побочной диагонали все элементы – нули, а по другую – единицы, и применить свойство $|AB| = |A| |B|$.

Ответ: $\Delta_n = n$.

1.21. Вычислить определители:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 + b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix};$$

$$2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 0 \end{vmatrix};$$

$$3) \Delta_n = \begin{vmatrix} a & a & a & \dots & a \\ a & 0 & a & \dots & a \\ a & a & 0 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & 0 \end{vmatrix};$$

$$4) \Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix};$$

$$5) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1/3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/n \end{vmatrix};$$

$$6) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1/q & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1/q^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1/q^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Решение

1. См. указание к п.3.

Ответ: $\Delta_{n+1} = b_1 b_2 \dots b_n$.

2. Разложив Δ_n по элементам 1-й строки, получить рекуррентную формулу: $\Delta_n = (\alpha + \beta)\Delta_{n-1} - \alpha\beta\Delta_{n-2}$, $n \geq 3$; вычислить Δ_2 , Δ_3 и попытаться предугадать формулу для вычисления Δ_{n-1} , а затем применить метод полной математической индукции, учитывая, что $\Delta_1 = \alpha + \beta$ можно записать в виде: $\Delta_1 = (\alpha^2 - \beta^2) / (\alpha - \beta)$, $(\alpha \neq \beta)$.

Ответ: $\Delta_n = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!$.

3. Вычесть 1-ю строку из остальных строк.

Ответ: $\Delta_n = (-1)^{n-1} d^n$.

4. См. указание к п.2.

Ответ: согласно указанию имеем $\Delta_n = (\alpha + \beta)\Delta_{n-1} - \alpha\beta\Delta_{n-2}$, $n \geq 3$. Найдем $\Delta_1 = \alpha + \beta$; $\Delta_2 = (\alpha - \beta)^2 - \alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta$ и перепишем их в виде: $\Delta_1 = (\alpha - \beta)^2(\alpha - \beta)$; $\Delta_2 = (\alpha^3 - \beta^3)/(\alpha - \beta)$. Допустим, что $\Delta_{n-2} = (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})/(\alpha - \beta)$. Тогда

$$\Delta_n = \frac{(\alpha + \beta)(\alpha^n - \beta^n)}{(\alpha - \beta)} - \frac{\alpha\beta(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})}{(\alpha - \beta)} = \frac{(\alpha^{n-1} - \alpha\beta^n + \beta\alpha^n - \beta^{n+1} - \alpha^n\beta + \alpha\beta^n)}{(\alpha - \beta)} =$$

$$= \frac{(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})}{(\alpha - \beta)}.$$

Отметим, что приведенный прием доказательства формулы для Δ_n и составляет содержание метода математической индукции.

5. См. указание к п.6.

Ответ: $\Delta_{n+1} = -(n+1)n/2 \times 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n} = -\frac{(n+1)}{2(n-1)!}$.

6. Вычестъ из 1-го столбца остальные, умножая их соответственно: в п.5 на $1, 2, \dots, n$, а в п.6 на $1, q, \dots, q^{n-1}$.

Ответ: $\Delta_{n+1} = -(1 + q + q^2 + \dots + q^n \times \dots \times 1) \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{q^{-1}} = -\frac{(1 - q^n)}{(1 - q)q^{n(n-1)/2}}$.

1.22. Вычислить:

1) определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$, умножая его на

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix};$$

2) квадрат Δ_1 из п.1;

$$3) \text{ квадрат } \Delta_2, \text{ где } \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}.$$

Решение

Правило умножения определителей приведено в указании к задачам, при этом нужно использовать, что определители данной и транспонированной матрицы равны $|A| = |A^T|$.

Ответ:

$$1) \Delta = (a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d);$$

$$2) \Delta_1^2 = 256;$$

3) $\Delta_2^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4 \Rightarrow \Delta_2 = \pm \sqrt{\Delta^2}$; но слагаемое a^4 входит в Δ_2 со знаком «плюс» как произведение элементов, стоящих на главной диагонали, поэтому $\Delta_2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$.

1.23. Пусть A – вещественная матрица размером $n \times n$, A^T – транспонированная к ней. Доказать, что если $AA^T = 0$, то $A = 0$ (0 – нуль-матрица).

Решение

Рассматривать элементы AA^T , стоящие на главной диагонали.

1.24. Матрица A с элементами $a_{ij}, i, j = \overline{1, n}$, называется антисимметрической, если $a_{ij} = -a_{ji}$. Доказать, что определитель $|A|$ такой матрицы нечетного порядка равен 0 .

Решение

Вывести из условия, что $A^T = -A$, $|A^T| = |A| = -|A|$.

1.25. Пусть A – квадратная матрица нечетного порядка, A^T – транспонированная к ней. Доказать, что $|A - A^T| = 0$.

Решение

Убедиться, что матрица $A - A^T$ – антисимметрическая.

1.26. Доказать, что если A – матрица размером $n \times n$, $A^2 = A$, то матрица $B = 2A - E$ (E – единичная) удовлетворяет условию $B^2 = E$. Найти $|A|$ и $|B|$.

Решение

Использовать правило умножения определителей.

Ответ: $|A| = 0$ или $|A| = 1$; $|B| = \pm 1$.

1.27. Вычислить:

$$1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{1999};$$

$$2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{100};$$

$$3) \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Решение

1. Убедиться, что $A^2 = -E$, где E – единичная матрица размером 2×2 .

Ответ: согласно указанию

$$A^{1999} = A(A^2)^{999} = A(-E)^{999} = -AE = -A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Найти несколько первых степеней матриц A^2 , A^3 и применить метод полной математической индукции.

Ответ: имеем (см. указание) $A^2 = \begin{pmatrix} 2^2 & 2+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix},$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 + 2 + 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix},$$

тогда $A^{n-1} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$

Поэтому $A^{100} = \begin{pmatrix} 2^{100} & 2^{100} - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{100} \end{pmatrix},$

так как $2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 1 = \frac{2^{n-1} \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 2^n - 1.$

Ответ: пусть $T(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}.$

1.28. Найти наименьшее $n \in N$, при котором выполняется равенство $\frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение

Записать левую часть в виде матрицы задачи **1.27**, п. 3.

Ответ: согласно указанию

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^n &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos \frac{n\pi}{6} & -\sin \frac{n\pi}{6} \\ \sin \frac{n\pi}{6} & \cos \frac{n\pi}{6} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sin \frac{\pi n}{6} = 0 \\ \cos \frac{\pi n}{6} = 0 \end{cases} \Rightarrow n = 6k, \quad k \in N. \text{ Наименьшее } n = 12. \end{aligned}$$

1.29. Учитывая, что предел матрицы равен матрице из пределов ее элементов, найти:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}^n;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} A^n, \text{ где } A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad a \in R, \text{ когда он существует;}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T^k(\varphi/n), \text{ где } T(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in R;$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n^n - E) \right), \text{ где } A^n = \begin{pmatrix} 1 & x/n \\ -x/n & 1 \end{pmatrix};$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \det(A^k) \right) / \det \left(\sum_{k=1}^n A^k \right), \quad A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a+1 & a-1 \\ a-1 & a+1 \end{pmatrix}; \quad a \neq -1;$$

$$6) \quad \text{с помощью матрицы} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{образуется}$$

$$\text{последовательность: } \overrightarrow{x_{n+1}} = A \overrightarrow{x_n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найти предел отношения координат вектора $\overrightarrow{x_n}$ при $n \rightarrow \infty$ при условии, что он существует.

Решение

Пп.1,2 – степень матрицы найти методом математической индукции; убедиться, что в п.2 элемент $a_{12}(n)$ матрицы A^n имеет вид: $a_{12}(n) = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$.

3. Использовать ответ задачи 1.27 п.3 для нахождения $T^k(\varphi/n)$; при вычислении суммы матриц можно использовать формулы:

$$A^n = \sum_{k=1}^n \cos k\alpha = \cos \frac{n+1}{2} \alpha \times \sin \frac{n\alpha}{2} / \sin \frac{\alpha}{2};$$

$$B^n = \sum_{k=1}^n \sin k\alpha = \sin \frac{n+1}{2} \alpha \times \sin \frac{n\alpha}{2} / \sin \frac{\alpha}{2} \quad \text{или использовать при}$$

$$\alpha = \frac{\varphi}{2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n / n = \int_0^1 \cos(x\varphi) dx; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_n / n = \int_0^1 \sin(x\varphi) dx.$$

4. Записать A_n в виде $A_n = \left(1 + (x/n)^2\right)^{1/2} T(\varphi)$, где $T(\varphi)$ – матрица из п.3 и $\operatorname{tg}(\varphi) = x/n$.

5. См. указание к пп.1,2.

6. Пусть (a_n, b_n) – координаты вектора $\overrightarrow{x_n}$, $a - (a_{n+1}, b_{n+1})$ – вектора $\overrightarrow{x_{n+1}}$ и $\overrightarrow{x_n}$.

1.30¹. Вычислить определитель n -го порядка матрицы $A = [a_{ij}]$,

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{|i-j|}, & i \neq j \\ 2, & i = j \end{cases}.$$

Решение

Прибавим вторую строку к первой, третью строку ко второй,..., n -ую строку к $(n-1)$ -й, получим

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & +1 & \dots & \pm 1 & \mp 1 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \mp 1 & \pm 1 \\ +1 & -1 & 2 & \dots & \pm 1 & \mp 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mp 1 & \pm 1 & \mp 1 & \dots & 2 & -1 \\ \pm 1 & \mp 1 & \pm 1 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \pm 1 & \mp 1 & \pm 1 & \mp 1 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Теперь вычтем первый столбец из второго. Далее вычтем полученный второй столбец из третьего,... и, наконец, $(n-1)$ -й столбец из n -го. В итоге получим

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n+1 \end{vmatrix} = n+1.$$

¹Задача предложена на IMC2002.

1.31. Вычислить определитель n -го порядка

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение

Разложим определитель по первой строке

$$\Delta_n = 3 \begin{vmatrix} 2 & \dots & 0 & 0 \\ -2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & \dots & -2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & \dots & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Первый из полученных определителей имеет тот же вид, что и Δ_n . Раскладывая второй определитель по первому столбцу, получаем рекуррентное уравнение

$$\Delta_n = 3\Delta_{n-1} + 4\Delta_{n-2}.$$

Решение уравнения будем искать в виде

$$\Delta_n = C_1 a^n + C_2 b^n,$$

где a и b – корни уравнения $x^2 - 3x - 4 = 0$, то есть

$$\Delta_n = C_1 (-1)^n + C_2 4^n,$$

а коэффициенты C_1 и C_2 подберём так, чтобы при $n=1$ и $n=2$ матрица давала бы правильные результаты. Получаем $a = \frac{1}{5}$ и

$b = \frac{4}{5}$. Следовательно, искомым определитель равен

$$\Delta_n = \frac{1}{5} \left[(-1)^n + 4^{n+1} \right].$$

1.32². Найти наименьший возможный ранг квадратной матрицы n -го порядка у которой все диагональные элементы равны нулю, а все остальные элементы положительные.

Решение

При $n=1$ матрица есть (0) и её ранг равен нулю. При $n=2$ определитель отрицательный, а ранг равен двум. Покажем, что для всех $n \geq 3$ минимальный ранг указанных в условии матриц будет равен 3.

Отметим, что первые три строки линейно независимы.

Приведём пример такой матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0^2 & 1^2 & 2^2 & \dots & (n-1)^2 \\ (-1)^2 & 0^2 & 1^2 & \dots & (n-2)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1+n)^2 & (-2+n)^2 & (-3+n)^2 & \dots & 0^2 \end{pmatrix} = \left((i-j)^2 \right)_{i,j=1}^n =$$

$$= \begin{pmatrix} 1^2 & 1^2 & \dots & 1^2 \\ 2^2 & 2^2 & \dots & 2^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n^2 & n^2 & \dots & n^2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & \dots & n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & \dots & n^2 \\ 1^2 & 2^2 & \dots & n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1^2 & 2^2 & \dots & n^2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что сумма 3 матриц, ранг которых равен 1, не может быть выше трёх.

² Задача предложена на IMC2012.

1.33³. Существует ли вещественная матрица третьего порядка, такая что: $\operatorname{tr} A = 0$ и $A^2 + A^T = E$?

Решение

Пусть $\operatorname{tr} A = 0$ и $A^2 + A^T = E$. Транспонируя уравнение, получим

$$A = E - (A^2)^T = E - (A^T)^2 = E - (E - A^2)^2 = 2A^2 - A^4,$$

$$A^4 - 2A^2 + A = 0.$$

Корни уравнения

$$x^4 - 2x^2 + x = x(x-1)(x^2 + x - 1) = 0,$$

$0, 1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ могут быть собственными числами матрицы A ,

собственными числами матрицы A^2 могут быть $0, 1, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Так как $\operatorname{tr} A = 0$, то сумма её собственных чисел также равна нулю, но $\operatorname{tr} A^2 = \operatorname{tr}(E - A^T) = 3$ и сумма квадратов собственных чисел также должна быть равна трём. Легко убедиться, что эти два условия не могут быть выполнены одновременно.

Ответ: не существует.

1.34. Найти наибольшее значение функции

$$f = |\chi_1 \chi_2 + \chi_1 \chi_4 + \chi_2 \chi_3 - \chi_2 \chi_4| \quad \text{на} \quad \text{единичном} \quad \text{кубе} \\ \left\{ \chi \in \mathbb{R}^4 \mid |\chi_k| \leq 1, 1 \leq k \leq 4 \right\}.$$

³ Задача предложена на ИМС2011.

Решение

$$f = |x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 - x_2 x_4| \leq |x_1| \cdot |x_3 + x_4| + \\ + |x_2| \cdot |x_3 - x_4| \leq |x_3 + x_4| + |x_3 - x_4|.$$

Без ограничения общности можно считать, что $x_3 \geq x_4 \geq 0$, поэтому $f \leq 2x_3 = 2$. Это значение достигается, например, в точке $x_k = 1, 1 \leq k \leq 4$.

Замечание.

Заметим, что относительно каждой координаты x_k (при фиксированных остальных) функция имеет вид $|ax_k + b|$, поэтому наибольшее значение функция принимает при $x_k = -1$ или $x_k = 1$. Следовательно, максимальное значение достигается в каких-то вершинах куба, которых 16. Ситуация здесь аналогична тому, что выпуклая непрерывная функция достигает максимума на компакте в некоторой крайней точке этого компакта.

1.35. В квадратной матрице A порядка $2n$ на главной диагонали стоят нули, а остальные элементы равны ± 1 . Доказать, что $\det A \neq 0$.

Решение

Рассмотрим матрицу $B = A^2$. В ней b_{ii} – нечетные числа (сумма нуля и нечетного числа ± 1), а b_{ij} , $i \neq j$, – четные числа (сумма двух нулей и четного числа ± 1). Следовательно, $\det A^2 = (\det A)^2$ – нечетное число.

1.36. Частица движется из точки A в точку B по прямой, не меняя направления движения. Расстояние $AB=1$, время движения равно 1, в начальный и конечный моменты времени движения скорость равна нулю. Доказать, что в некоторый

момент времени абсолютная величина ускорения частицы равна 4 .

Решение

Пусть $v(t)$ – скорость частицы в момент времени $t, t \in [0, 1]$. Тогда $v(0) = v(1) = 0, \int_0^1 v(t) dt = 1$. В координатах (t, v) рассмотрим треугольник OMN , где $O(0), M(\frac{1}{2}, 2), N(1, 0)$. График функции $v(t)$ пересекается по крайней мере с одной из боковых сторон треугольника OMN , так как $S_{OMN} = 1$. Следовательно, на графике функции $v = v(t)$ найдется точка $(t_0, v(t_0))$, в которой касательная параллельна боковой стороне треугольника, т.е. $|v'(t_0)| = 4$.

1.37. Доказать, что функция $T(x) = \frac{a_0}{2} + \cos x + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \cos kx$, где $|a_0| < 1$, принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Решение

Всегда. Пусть A и B – точки данного множества. Существует такое число R_0 , что для любого $R > R_0$ малая дуга окружности радиусом R , проходящей через точки A и B , лежит в единичном квадрате. Множество таких дуг несчетно, поэтому хотя бы на одной из них нет точек удаленного множества.

1.38. Пусть A и B – замкнутые выпуклые множества на плоскости. Следует ли отсюда, что их сумма $A+B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = a+b, a \in A, b \in B\}$ тоже замкнутое множество?

Решение

Нет. Например, если $A = \{(x, y) | y = 0\}$, а $B = \{(x, y) | x > 0, y = 0, xy > 1\}$, то $A + B = \{(x, y) | y > 0\}$.

1.39. Можно ли число π представить как $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{k_n - m_n})$, где $\{k_n\}$ и $\{m_n\}$ – последовательности натуральных чисел?

Решение

При каждом натуральном n числа

$$p(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{p^2(n+1)} - \sqrt{p^2 n}, \quad p = 1, 2, \dots,$$

образуют арифметическую прогрессию с разностью $d_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Следовательно, с точностью d_n ими можно приблизить любое число из $(0, \infty)$. Так как $d_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то любое число, в том числе и π , можно представить в виде $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{k_n} - \sqrt{m_n})$.

1.40. Доказать, что при $a > 1$ справедливо равенство

$$\int_0^{\pi/2} \cos ax (\cos x)^{a-2} dx = 0.$$

Решение

Требуемый результат получается сразу, если исходный интеграл следующим образом разбить на два интеграла, а затем во втором проинтегрировать по частям:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \cos ax (\cos x)^{a-2} dx &= \int_0^{\pi/2} (\cos(a-1)x \cos x - \sin(a-1)x \sin x) (\cos x)^{a-2} dx = \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos(a-1)x (\cos x)^{a-1} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(a-1)x}{a-1} d(\cos x)^{a-1} = \\
&= \frac{\sin(a-1)x}{a-1} (\cos x)^{a-1} \Big|_0^{\pi/2} = 0.
\end{aligned}$$

1.41. 1994 окружности разбивают плоскость на области, границами которых являются дуги окружностей. Сколько цветов необходимо, чтобы раскрасить такую географическую карту?

Решение

Каждая точка лежит либо внутри четного числа окружностей, либо внутри нечетного. Поэтому достаточно двух цветов – черного и нечерного.

1.42. Всегда ли будет связным множество, полученное из открытого единичного квадрата удалением счетного множества точек?

Решение

Всегда. Пусть A и B – точки данного множества. Существует такое число R_0 , что для любого $R > R_0$ малая дуга окружности радиусом R , проходящей через точки A и B , лежит в единичном квадрате. Множество таких дуг несчетно, поэтому хотя бы на одной из них нет точек удаленного множества.

1.43. Найти все непрерывные функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие уравнению $3f(2x+1) = f(x) + 5x$.

Решение

Методом неопределенных коэффициентов находим решение в классе линейных функций: $f_1(x) = x - \frac{3}{2}$. Покажем, что f_1 – единственное решение.

Пусть $g(x) = f(x) - f_1(x)$, тогда $g \in C(\mathbb{R})$ и удовлетворяет уравнению $3g(2x+1) = g(x)$. Заменим в этом уравнении x на $\frac{x-1}{2}$: $g(x) = \frac{1}{3}g(\frac{x-1}{2})$. В полученном уравнении опять заменим x на $\frac{x-1}{2}$: $g(\frac{x-1}{2}) = \frac{1}{3}g(\frac{x-3}{4})$ и т.д. Получим $g(x) = \frac{1}{3^n}g(\frac{x-2^n+1}{2^n})$, $n=1, 2, \dots$.

В силу непрерывности g для любого x

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(\frac{x-2^n+1}{2^n}) = g(-1), \text{ поэтому } g(x) \equiv 0.$$

1.44. Пусть $c(\alpha)$ – коэффициент при x^{1994} в разложении по формуле Маклорена функции $(1+x)^\alpha$. Вычислить $\int_0^1 c(-y-1)(\frac{1}{y+1} + \dots + \frac{1}{y+1994})dy$.

Решение

$$\frac{1}{1994!} \int_0^1 (\prod_{k=1}^{1994} (y+k))' dy = 1994.$$

1.45. Пусть $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ – ортонормированная на отрезке $[0,1]$ система непрерывных функций. Доказать, что хотя бы для одной функции $\varphi_i (i=1, \dots, n)$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^n \left(\int_{k-1/n}^{k/n} \varphi_1(x) dx \right)^2 \leq \frac{1}{n}.$$

Решение

Применим неравенство Бесселя для характеристических функций $u_k(x)$ отрезков $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right]$, где $u_k(x) = 1$ при $x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right]$, $u_k(x) = 0$ при $x \notin \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right]$:

$$\sum_{i=1}^n (u_k, \varphi_i)^2 \leq (u_k, u_k) = \frac{1}{n}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Следовательно, $\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n (u_k, \varphi_i)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n (u_k, \varphi_i)^2 \right) \leq 1$, а потому найдется $i = \sum_{k=1}^n (u_k, \varphi_i)^2 \leq \frac{1}{n}$.

1.46. На плоскости дана парабола. Как с помощью циркуля и линейки построить ее ось?

Решение

Как известно, середины параллельных хорд параболы лежат на диаметре, поэтому возможен такой план построения:

1) проводим две параллельные хорды, тогда прямая, проходящая через их середины, — диаметр,

2) строим хорду, перпендикулярную к этому диаметру, а затем через ее середину проводим прямую, параллельную диаметру.

1.47. Может ли график непрерывной функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ пересекать каждую невертикальную прямую бесконечное число раз?

Решение

Да. Например, $f(x) = x^2 \sin x$.

1.48. Существует ли непрерывная при $x > 1$ функция f , удовлетворяющая уравнению $(x^2 - x)(f(x^2) + f(x)) = 1$?

Решение

Да. При $x > 1$ имеем $\frac{1}{x^2 - x} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{x^k}$ — ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компакте из $\{x > 1\}$. Чтобы получить $f(x)$, достаточно построить разбиение

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\} = \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \cup \{2n_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

$$\text{Явная формула: } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{-2^{2n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x^{-2^{2n(2k+1)}}.$$

1.49. Существует ли непрерывно дифференцируемая функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию

$$|f(x)| < 2, \quad f(x)f'(x) \geq \sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$f(x)f'(x) \geq \sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}?$$

Решение

Не существует. Имеем

$$f^2(x) - f^2(0) = \int_0^x 2f(t)f'(t)dt \geq 2 \int_0^x \sin t dt = 2(1 - \cos x),$$

следовательно, $f^2(\pi) \geq 4$.

1.50. Пусть $f_1, \dots, f_n$ — линейно независимая система непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, 1]$ функций.

Доказать, что среди производных $f'_1, \dots, f'_n$ найдутся $n-1$ линейно независимых функций.

Решение

Пусть $f'_1, \dots, f'_n$ линейно зависимы (в противном случае все ясно) и, например, $c_1 f'_1 + \dots + c_{n-1} f'_{n-1} = f'_n$. Тогда $c_1 f'_1 + \dots + c_{n-1} f'_{n-1} + c = f'_n$, где $c \neq 0$ в силу линейной независимости системы $\{f_k\}_{k=1}^n$. Покажем, что функции $\{f'_k\}_{k=1}^{n-1}$ линейно независимы. Если $a_1 f'_1 + \dots + a_{n-1} f'_{n-1} = 0$, $a_1 f'_1 + \dots + a_{n-1} f'_{n-1} + A = 0$, $A = \text{const}$. Отсюда

$$(Ac_1 - ca_1) f_1 + \dots + (Ac_{n-1} - ca_{n-1}) f_{n-1} = Af_n.$$

Следовательно, $A = 0$, а тогда и $a_k = 0$ при $1 \leq k \leq n-1$.

1.51. Найти предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{c^{\frac{k}{n}}} \right)^n$.

Решение

Пусть $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{c^{\frac{k}{n}}}$. Тогда при достаточно больших значениях n

$$a_n > \frac{1}{c^1} + \frac{1}{c^{\frac{n-1}{n}}} + \frac{1}{c^n} = 1 + \frac{2}{n},$$

$$a_n > 1 + \frac{1}{c^1} + \frac{1}{c^2} + \frac{n-5}{c^3} < 1 + \frac{2}{n} + \frac{1995}{n^2}.$$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n = e^2$.

1.52. Доказать, что при $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ справедливо неравенство

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} < 1.$$

Решение

Обозначим определитель через W . Достаточно доказать, что $W^2 < 1$. Имеем

$$\begin{aligned} W^2 &= (y-x)^2(z-x)^2(z-y)^2 \leq \left(\frac{(y-x)^2 + (z-x)^2 + (z-y)^2}{3} \right) \leq \\ &\leq \left(\frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{3} \right)^3 = 1, \text{ причем первое неравенство превращается в} \\ &\text{равенство только при } x = y = z, \text{ а тогда } W = 0. \end{aligned}$$

1.53. Определим сумму двух множеств на евклидовой плоскости:

$$A + B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = a + b, a \in A, b \in B\}.$$

Пусть $A = B_r(a) \cap B_r(-a)$, где $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - a\| < r\}$ — круг радиусом $r > 0$ с центром в точке a , $\|a\| \leq r$. Доказать, что найдутся такие точки b_1 и b_2 , что

$$A + (B_r(b_1) \cap B_r(b_2)) = B_r(0). \quad (*)$$

Решение

Пусть b и $-b$ — точки пересечения окружностей $\|x \pm a\| = r$. Тогда равенство $(*)$ выполнено для $b_1 = b, b_2 = -b$. Легко видеть, что если $p \in \mathbb{R}^2$ — единичный вектор, то

$$\max\{(p, x) \mid x \in A\} + \max\{(p, x) \mid x \in B_r(b) \cap B_r(-b)\} = r. \quad (**)$$

Следовательно, $\max\{(p, x) | x \in C\} = \max\{(p, x) | x \in B_r(0)\}$, где $C = A + B_r(b) \cap B_r(-b)$. Поскольку C есть выпуклый компакт, то $C = B_r(0)$. Действительно, допустим, что существует точка $x_0 \in C \setminus B_r(0)$. Пусть b_0 — метрическая проекция x_0 на $B_r(0)$, $p_0 = \frac{x_0 - b_0}{\|x_0 - b_0\|}$. Если допустить, что для некоторой точки $b \in B_r(0)$ $(p_0, b - b_0) > 0$, то в силу выпуклости $B_r(0)$ для любого $\lambda \in (0, 1)$ $\lambda b + (1 - \lambda)b_0 \in B_r(0)$ и

$\|x_0 - (\lambda b + (1 - \lambda)b_0)\|^2 = \|x_0 - b_0\|^2 - 2\lambda(x_0 - b_0, b - b_0) + \lambda^2 \|b - b_0\|^2 < \|x_0 - b_0\|^2$ при малых $\lambda > 0$. Таким образом, $(p_0, b - b_0) \leq 0 \forall b \in B_r(0)$, а $(p_0, x_0) > (p_0, b_0)$. Это противоречит формуле (**).

Аналогично показывается, что равенство $B_r(0) \setminus C \neq \emptyset$ невозможно. Следовательно, $C = B_r(0)$.

Проверку формулы (**) для всех p предоставляем читателю.

Замечание. Эта задача предложена Е. С. Половинкиным. Аналогичное свойство шара имеет место в гильбертовом и некоторых других пространствах. Исследование свойства (*) повлекло создание теории сильно выпуклого анализа, частично изложенной в [14].

1.54. Для множеств на комплексной плоскости определим операции сложения и умножения

$$A + B = \{z \in \mathbb{C} | z = a + b, a \in A, b \in B\},$$

$$A * B = \{z \in \mathbb{C} | z = ab, a \in A, b \in B\}.$$

Пусть $A = \left\{z \left| z = \frac{1}{1995} \right.\right\}$. Найти хотя бы одно решение

уравнения $A + X = A * X$, удовлетворяющее условию $0 \notin X$.

Решение

Например, $X = \{z \mid |z| \geq \frac{1}{1994}\}$.

1.55. Доказать, что для любого натурального числа n справедливо неравенство $\{n\sqrt{2}\} > \frac{1}{2n\sqrt{2}}$, где $\{x\}$ – дробная часть числа x .

Решение

Имеем $k = [n\sqrt{2}] < n\sqrt{2}$, следовательно,

$$1 \leq 2n^2 - k^2 = (n\sqrt{2} - k)(n\sqrt{2} + k) < \{n\sqrt{2}\} \cdot 2n\sqrt{2}.$$

1.56. Пусть $f \in C^{n+1}(\mathbb{R})$ и $\ln\left(\frac{f(b) = f'(b) + \dots + f^{(n)}(b)}{f(a) + f'(a) + \dots + f^{(n)}(a)}\right) = b - a$, где $a < b$. Доказать, что найдется $c \in (a, b)$ такое, что $f^{n+1}(c) = f(c)$

Решение

Пусть $g(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x)$, тогда $g(b) = g(a)e^{b-a}$. Применим к функции $h(x) = e^{-x}g(x)$ теорему Ролля на отрезке $[a, b]: \exists c \in (a, b)$ такое, что $h'(c) = -e^{-c}g(c) + e^{-c}g'(c) = 0$. Следовательно, $g'(c) = g(c)$.

1.57. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$, если $a_1 = a > 0$, $a_2 = a^2$, $a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{n-i}$ при $n \geq 3$.

Решение

Рассмотрим формальный степенной ряд $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$.

Тогда

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{n-i} \right) z^n = az + f^2(z).$$

Отсюда с учетом условия $f(0) = 0$ находим

$$f(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4az}}{2}.$$

Радиус сходимости ряда Тейлора функции $f(z)$ в нуле равен $\frac{1}{4a}$, поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 4a$.

1.58. Доказать, что при $n \geq 2$ все положительные корни многочлена $P(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} x^k$ лежат на интервале $\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}, 2 - \frac{1}{2^n}\right)$.

Решение

При $x \neq 1$ $P(x) = \frac{x^{n+1} - 2x^n + 1}{x - 1}$. Рассмотрим многочлен $Q(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$ при $x > 0$. Так как $Q(0) = Q(2) = 1$ и $Q(1) = 0$ $Q'(x) = x^{n-1}[(n+1)x - 2n]$, то второй положительный корень многочлена $Q(x)$ лежит на интервале $\left(\frac{2n}{n+2}, 2\right)$. Точнее, этот корень лежит на интервале $\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}, 2 - \frac{1}{2^n}\right)$, поскольку

$$\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)^{n+1} - 2\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)^n + 1 < -2\left(1 - \frac{n}{2^n}\right) + 1 \leq -2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 0.$$

$$Q\left(2 - \frac{1}{2^n}\right) = -\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)^n + 1 > 0.$$

1.59. Пусть $x, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ — элементы евклидова пространства, $c_1, \dots, c_n$ — произвольные вещественные числа. Доказать неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^n c_i(x, \varphi_i)\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n c_i^2\right)^2 (x, x) \left(\max_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |(\varphi_i, \varphi_j)|\right).$$

Решение

Имеем оценку

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n c_i(x, \varphi_i)\right)^2 &= (x, \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i)^2 \leq (x, x) \cdot \left(\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i, \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j\right) = \\ &= (x, x) \sum_{i,j} c_i c_j (\varphi_i, \varphi_j) \leq \frac{1}{2} (x, x) \sum_{i,j} (c_i^2 + c_j^2) |(\varphi_i, \varphi_j)| \leq \\ &\leq (x, x) \left(\sum_{i=1}^n c_i^2\right) \left(\max_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |(\varphi_i, \varphi_j)|\right). \end{aligned}$$

1.60. Пусть $A = (a_{ij})$ — невырожденная матрица порядка n , $a_{ij} > 0 \forall i, j$. Доказать, что $z_n \leq n^2 - 2n$, где z_n — число нулевых элементов в матрице A^{-1} .

Решение

Пусть $A^{-1} = (b_{ik})$. Тогда $\sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kj} = 0$ при $i \neq j$, а так как $a_{kj} > 0$, то среди элементов i -й строки матрицы A^{-1} есть по крайней мере два ненулевых. Следовательно, всего ненулевых элементов не менее чем $2n$, и отсюда $z_n \leq n^2 - 2n$.

1.61. Пусть спектр матрицы порядка n $A(x) = B(x) + \frac{C}{x}$ ограничен на интервале $x \in (0, 1)$, матрица C — постоянная, а

элементы матрицы $B(x)$ ограничены на отрезке $[0,1]$ Доказать, что матрица C – нильпотентная (т.е. $\exists k \in \mathbb{N} : C^k = 0$).

Решение

Из условия следует, что коэффициенты $q_i(x)$ характеристического многочлена

$$P(\lambda) = \det(\lambda E - A(x)) = \lambda^n + q_1(x)\lambda^{n-1} + \dots + q_n(x)$$

ограничены на интервале $(0,1)$. Из теоремы Гамильтона—Кэли следует, что

$$P(A(x)) = \frac{C^n}{x^n} + \frac{D_1(x)}{x^{n-1}} + \dots + D_n(x) = 0, \text{ причем элементы всех}$$

матриц $D_j(x)$ ограничены на интервале $(0,1)$. Поэтому

$$C^n = \lim_{x \rightarrow \infty} (-xD_1(x) - \dots - x^n D_n(x)) = 0.$$

Аналитическая геометрия

1.62. На плоскости даны три попарно пересекающиеся окружности. Через точки пересечения каждой двух окружностей проведена прямая. Доказать, что эти три прямые пересекаются в одной точке или параллельны.

Решение

Каждую окружность "накрываем" параболоидом вида $z = R_i^2 - (x - x_i)^2 - (y - y_i)^2$. Каждая пара параболоидов пересекается по параболе, проекция которой на плоскость Oxy дает соответствующую прямую. Но такая парабола либо пересекает третий параболоид в единственной точке, либо не пересекает.

1.63 Две вершины квадрата лежат на оси абсцисс, а две другие – на кривой: 1) $y = x - x^2$;

2) $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ ($a > b$). Найти площадь квадрата.

Решение

Указание: пусть x_1, x_2 ($x_2 > x_1$) абсциссы вершины квадрата,

тогда $x_2 - x_1 = |y(x_1)| = |y(x_2)|$.

1) рассмотреть оба случая: $x_1 x_2 > 0$ и $x_1 < 0, x_2 > 0$.

В соответствии с указанием имеем $(x_2 > x_1) x_2 - x_1 = |y(x_1)| = |y(x_2)|$, поэтому рассмотрим случаи:

а) $y(x_k) > 0, k = 1, 2$, и

б) $y(x_k) < 0, k = 1, 2$ (см. рис. 1).

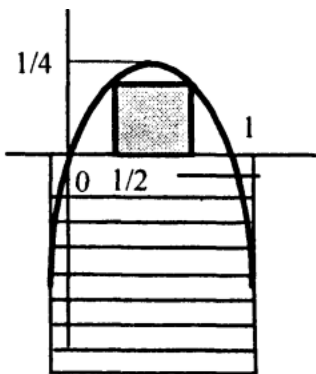


Рис. 1

$$\text{В случае "а"} \quad \begin{cases} x_2 - x_1 = x_1 - x_1^2, \\ x_2 - x_1 = x_2 - x_2^2, \end{cases} \Rightarrow x_1 - x_2 = x_1^2 - x_2^2 =$$

$$= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \Rightarrow x_1 + x_2 = 1. \quad \text{Поэтому} \quad x_1^2 - 3x_1 + 1 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1 = (3 \pm \sqrt{5})/2, \quad \text{но} \quad \text{только} \quad x_1 = (3 - \sqrt{5})/2 < 1. \quad \text{Тогда:} \\ x_2 = 1 - x_1 = (\sqrt{5} - 1)/2 \quad \text{и} \quad S_1 = (x_2 - x_1)^2 = 9 - 4\sqrt{5}.$$

$$\text{В случае "б"} \quad x_2 - x_1 = -y(x_1) = x_1^2 - x_1 = x_2^2 - x_2 = -y(x_2) \quad \text{и по-} \\ \text{прежнему} \quad x_1 + x_2 = 1. \quad \text{Тогда} \quad x_1^2 = x_2 = 1 - x_1 \Rightarrow x_1^2 + x_2 - 1 = 0, \\ x_1 = -(1 + \sqrt{5})/2 < 0, \quad x_2 = 1 + (1 + \sqrt{5})/2 = (3 + \sqrt{5})/2 > 1. \quad \text{Поэтому} \\ x_2 - x_1 = (3 + \sqrt{5})/2 + (1 + \sqrt{5})/2 = 2 + \sqrt{5}; \\ S = (x_2 - x_1)^2 = (2 + \sqrt{5})^2 = 9 + 4\sqrt{5}; \quad 2) \quad S = 4a^2b^2 / (4a^2 + b^2).$$

1.64. Доказать, что при любом натуральном n существует сечение n -мерного куба $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x_k\| \leq 1, k = 1, \dots, n\}$ двумерной плоскостью, являющееся правильным $2n$ -угольником.

Решение

Проведем через начало координат в $\mathbb{R}^n$ плоскость, порожденную векторами a и b . Она пересекает куб по множеству $\{\alpha a + \beta b \mid |\alpha a_k + \beta b_k| \leq 1, k = 1, \dots, n\}$. Векторы a и b достаточно выбрать так, чтобы выполнялись следующие свойства:

$$1) \quad \|a\| = \|b\| \quad \text{и} \quad (a, b) = 0;$$

2) на двумерной плоскости с координатами (α, β) неравенства $|\alpha a_k + \beta b_k| \leq 1, k = 1, \dots, n$, задают правильный $2n$ -угольник.

$$\text{Оба свойства выполняются, например, при} \\ a_k = \sin \frac{k\pi}{n}, b_k = \cos \frac{k\pi}{n} : (a, b) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sin \frac{2k\pi}{n} = 0,$$

$$\|a\|^2 = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \cos \frac{2k\pi}{n} = \frac{n}{2},$$

$$\|b\|^2 = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \cos \frac{2k\pi}{n} = \frac{n}{2}.$$

1.65. Точка $A(1;-1)$ – вершина равнобедренного треугольника $\triangle ABC$, прямая $2x+y=0$ служит его основанием BC , а точка $M(0;-3)$ лежит на стороне AB . Составить уравнение окружности, вписанной в $\triangle ABC$.

Решение

Пусть $\triangle ABC$ – равнобедренный ($AB=AC$), (BC): $y+2x=0$ и $A(1;-1)$; $M(0;-3) \in (AB)$ (см. рис. 2).

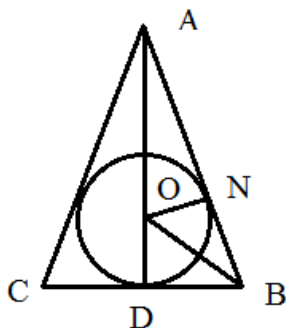


Рис. 2

Центр O вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис углов $\triangle ABC$. Но AD является высотой, медианой и биссектрисой, поэтому точка O лежит на пересечении (AD) и (OB) , причем $O \in (AD)$. Составим уравнение (AD) и (AB) . Имеем: (AB) совпадает с (AM) ,

поэтому $(AB): \frac{x-1}{0-1} = \frac{y+1}{-3+1} \Rightarrow 2x-y-3=0$;

$(AD) \perp (BC) \Rightarrow (AD): \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} \Rightarrow x-2y-3=0$ [направляющим

вектором (AD) можно взять вектор нормали $(CB) \vec{n}(2;1)$]. Пусть N и D – точки касания сторон AB и CD к окружности, поэтому:

$$\begin{cases} |OD| = |ON| \\ O(x_0, y_0) \in (AD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |2x_0 + y_0| / \sqrt{5} = |2x_0 - y_0 - 3| / \sqrt{5} \\ x_0 - 2y_0 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$a) \begin{cases} 2x_0 - y_0 - 3 = 2x_0 + y_0 \\ x_0 - 2y_0 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = -3/2 \\ x_0 = 0 \end{cases};$$

$$б) \begin{cases} 2x_0 - y_0 - 3 = -2x_0 - y_0 \\ x_0 - 2y_0 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 3/4 \\ y_0 = -9/8 \end{cases}.$$

Итак, $O_1(0; 3/2)$, $O_2(3/4; -9/8)$. Точки A и O должны лежать по одну сторону от (CB) , поэтому проверим знаки левой части уравнения (CB) при $O=O_1$ и $O=O_2$. Имеем в точке $A(1; -1): 2x + y = 0, 2 \times 1 - 1 > 0$, в точке $O_1: -3/2 < 0$; $O_2: 2 \times 3/4 - 9/8 > 0$. Поэтому $O_2(3/4; -9/8)$ – центр вписанной окружности, ее радиус $r = |2 \times (3/4) - 9/8| / \sqrt{5}$. Следовательно, $(x - 3/4)^2 + (y + 9/8)^2 = 9/320$ – уравнение искомой окружности.

1.66. Пусть B – центрально симметричное выпуклое компактное тело в $\mathbb{R}^2$. Доказать, что найдется такой параллелограмм, содержащий B , что середины сторон параллелограмма будут являться точками множества B .

Решение

Лемма. Пусть векторы a , b не параллельны. Тогда $\exists \varepsilon > 0: \forall x \in B_\varepsilon(a), \forall y \in B_\varepsilon(b)$, векторы x и y не параллельны.

Доказательство. Допустим противное: $\forall k \exists x_k \in B_{1/k}(a)$ и $\exists y_k \in B_{1/k}(b): x_k$ и y_k параллельны. Так как $a, b \neq 0$, то $x_k, y_k \neq 0$ (для достаточно больших номеров k) и $\lambda_k x_k + y_k \neq 0$ для $\lambda_k = \pm \|y_k\| / \|x_k\|$ (для одного из знаков). В силу сходимости

$x_k \rightarrow a, y_k \rightarrow b$ получаем в пределе $\lambda a + b = 0$, где $\lambda = \lim \lambda_k = \pm \|b\| / \|a\|$. Противоречие.

Пусть P_k – последовательность параллелограммов с вершинами $\{x_k^i\}_{i=1}^4$ таких, что $B \subset P_k$ для всех k и

$$\lim S(P_k) = S = \inf \{S(P) \mid P - \text{параллелограмм } B \subset P\}. (*)$$

Поскольку $\{P_k\}$ ограничена, то можем считать $\lim x_k^i = x^i, 1 \leq i \leq 4$. В силу леммы точки $\{x_k^i\}_{i=1}^4$ являются вершинами параллелограмма P , на котором в силу непрерывности площади достигается значение S в (*). Покажем, что середины сторон P являются точками из B .

Допустим противное. Пусть O – центр симметрии

$$B \text{ и } (P), y = \frac{1}{2}(x^1 + x^2).$$

Пусть $[x^1, x^2] \cap B = [a, b]$ (в силу выпуклости B) и $y \notin [a, b]$. Тогда $\exists \varepsilon > 0: [a, b] \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$.

$$\text{Пусть } [a, b] \subset [x^1, y], y_\varepsilon = y + \frac{\varepsilon}{2} \frac{x^1 - x^2}{\|x^1 - x^2\|}.$$

Из-за выпуклости B выполнено $[y_\varepsilon, x^2] \cap B = \emptyset$, поэтому (в силу компактности множеств в последнем равенстве) $\exists \delta > 0: \delta$ -окрестность $[y_\varepsilon, x^2]$ не пересекает B .

$$\text{Пусть } z = x^2 + \frac{\delta}{2} \frac{x^3 - x^2}{\|x^3 - x^2\|}. \text{ По построению } [y_\varepsilon, z] \cap B = \emptyset.$$

Пусть ω – пересечение прямой $\text{aff}\{y_\varepsilon, z\}$ с прямой $\text{aff}\{x^1, x^4\}$.

Пусть ω' и z' – точки, симметричные точкам ω и z относительно точки O . Так как площадь треугольника $\omega x^1 y_\varepsilon$

строго меньше площади треугольника zx^2y_ε , то параллелограмм $\omega z \omega' z'$ содержит B (в силу центральной симметрии) и имеет площадь, меньшую чем P .

Замечание. Из этой задачи следует, что если за единичный шар на плоскости взять множество B , то его периметр будет не более 8.

1.67. Прямая (ℓ) скользит по прямым $(\ell_1): x=0, y=0$ и $(\ell_2): x=1, z=0$ и остается параллельной плоскости $(\alpha): x+y+z=0$. Найти поверхность, образованную движением прямой (ℓ) .

Решение

Запишем уравнение прямых (ℓ_1) и (ℓ_2) в параметрическом

виде $(\ell_1): \begin{cases} x=0, \\ y=0, \\ z=\lambda_1, \end{cases} \quad (\ell_2): \begin{cases} x=1, \\ y=\lambda_2, \\ z=0 \end{cases}$ и запишем уравнение прямой

$$(\ell): \frac{x}{1} = \frac{y}{\lambda_2} = \frac{z-\lambda_1}{-\lambda_1}, \quad \lambda_k \in R, k=1, 2. \quad \text{По условию прямая } (\ell)$$

параллельна плоскости $(\alpha): x+y+z=0$, т.е. $1+\lambda_2-\lambda_1=0$ [условие параллельности (ℓ) и (α)]. Выразим теперь x, y, z из уравнения (ℓ) через λ_1, λ_2 и исключим эти параметры. Имеем $y=\lambda_2 x, z=\lambda_1(1-x)=(1+\lambda_2)(1-x)$. Заменяя λ_2 на $\lambda_2=-y/x$, получаем $z=(1+y/x)(1-x)$ или $x^2+xy+xz-x-y=0$ — это и есть искомое уравнение поверхности.

1.68. Пусть a, b, c — расстояния между тремя точками целочисленной решетки, лежащими на окружности радиусом R . Доказать, что $abc \geq 2R$.

Решение

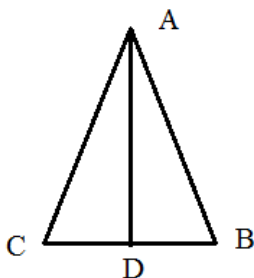
Пусть S – площадь треугольника с вершинами в узлах решетки, тогда $S \geq \frac{1}{2}$ [так как $S = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|$, где (x_i, y_i) – координаты двух вершин относительно третьей]. В то же время $S = \frac{abc}{4R}$.

1.69. Найти объем сечения четырехмерного куба $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x_k \leq 1, k \in \overline{1, 4}\}$ гиперплоскостью $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$.

Решение

Точки пересечения секущей плоскости с координатными осями образуют правильный тетраэдр с ребром $2\sqrt{2}$. Плоскости $x_k = 1$ отсекают от него четыре правильных тетраэдра с ребром $\sqrt{2}$. Так как объем правильного тетраэдра с ребром a равен $\frac{\sqrt{2}}{12} a^3$, то объем сечения равен $\frac{\sqrt{2}}{12} (2\sqrt{2})^3 - \frac{\sqrt{2}}{12} (\sqrt{2})^3 = \frac{4}{3}$.

1.70. Дана вершина $(3; 5)$ равнобедренного треугольника, уравнение его основания $x - 2y + 12 = 0$ и его площадь $S = 15$. Составить уравнения боковых сторон.

Решение

Рассмотрим $\triangle ABC$, где $AB = AC$, $A(3, 5)$, уравнение $(BC): x - 2y + 12 = 0$, $S_{\triangle} = 15$ и AD – высота. Составим уравнение (AD) .

Так как нормаль к (CB) $\vec{n}(1; 2)$ является направляющим вектором (AD) ,

Рис. 3

то получаем $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} \Rightarrow 2x + y - 11 = 0$.

Координаты точки D находим из системы уравнений

$$\begin{cases} 2x + y - 11 = 0 \\ x - 2y + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow D(2; 7).$$

Пусть x, y координаты вершины $B(x, y)$, тогда $S_{\Delta ABC} = 15/2 = \left| \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB} \right| = \left| \overrightarrow{K}(11 - y - 2x) \right| / 2 \Rightarrow 2x + y - 11 = \pm 15$.

Найдем координаты точек B и C , решая систему уравнений:

$$a) \begin{cases} 2x + y = 26 \\ x - 2y = -12 \end{cases} \Rightarrow B_1(8; 10); б) \begin{cases} 2x + y = -4 \\ x - 2y = -12 \end{cases} \Rightarrow B_2(-4; 4).$$

B_1 примем за B , B_2 — за C . Тогда $(AB): \frac{x-3}{5} = \frac{y-5}{5} \Rightarrow \Rightarrow x - y + 2 = 0$; $(AC): \frac{x-3}{-7} = \frac{y-5}{-1} \Rightarrow x - 7y + 32 = 0$.

1.71. Доказать, что единичный квадрат можно разрезать на N квадратов меньшего размера, если N достаточно велико.

Решение

Очевидно, квадрат можно разрезать на k^2 квадратов меньшего размера, $k \geq 2$. Это число можно увеличить до $k^2 + p(m^2 - 1) + q(n^2 - 1)$, где m, n, p, q — любые натуральные числа. Если натуральные числа a, b — взаимно простые, то любое целое число c можно представить в виде $c = ax + by (x, y \in \mathbb{Z})$. При этом, если натуральное c достаточно велико, то найдутся неотрицательные решения. Действительно, $\{0, a, \dots, (b-1)a\}$ — полная система вычетов по модулю b . Следовательно, $ax \equiv c \pmod{b}$ при некотором $x \in \{0, 1, \dots, b-1\}$. Если $c \geq (b-1)a$, то

число $y = \frac{c-ax}{b}$ является неотрицательным. Взяв $m=2, n=3$, получаем пару взаимно простых чисел $a=m^2-1=3$ и $b=n^2-1=8$. Существование разбиения вида $N=k^2+3p+8q$ для достаточно большого N следует из приведенного выше рассуждения.

1.72. Отрезок $[AB]$ длиной 3 скользит своими концами по координатным осям (A – по Oy , B – по Ox). Какую траекторию описывает точка C , находящаяся на отрезке на расстоянии 1 от вершины A ?

Решение

Пусть точки A и B имеют координаты $A(0; y)$, $B(x; 0)$, точка $C(x_c, y_c) \in [AB]$ и отстоит от A на расстоянии 1 (см. рис. 4). Точка C делит $[AB]$ в отношении $\lambda = |AC|/|CB| = 1/2$, поэтому

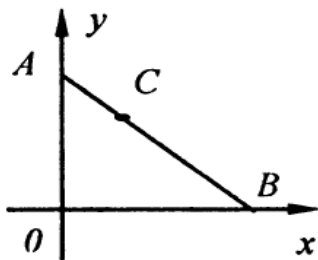


Рис. 4

$$x_c = \frac{x_A + \lambda \times x_B}{1 + \lambda} = \frac{0 + x/2}{1 + 1/2} = x/3;$$

$$y_c = \frac{y_A + \lambda \times y_B}{1 + \lambda} = \frac{y + 0/2}{1 + 1/2} = 2y/3.$$

По условию $|AB|=3$, поэтому $|AB|^2 = x^2 + y^2 = 9$. Подставляя в последнее равенство $x=3x_c$, $y=3y_c/2$, получаем $9x_c^2 + 9y_c^2/4 = 9$. Итак, точка C движется по эллипсу $x^2 + (y/2)^2 = 1$.

1.73. Касательные к параболе $y^2 = 2px$ в точках A, B и C образуют треугольник KLM . Доказать, что $S_{KLM} = \frac{1}{2} S_{ABC}$.

Решение

Касательные к параболе в точках $\left(\frac{y_i^2}{2p}, y_i\right)$ ($i=1, 2, 3$) задаются уравнениями $yy_i = px + \frac{y_i^2}{2}$.

Касательные пересекаются в точках $\left(\frac{y_i y_j}{2p}, \frac{y_i + y_j}{2}\right)$.

$$\text{Следовательно, } S_{ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} y_1^2 / 2p & y_1 & 1 \\ y_2^2 / 2p & y_2 & 1 \\ y_3^2 / 2p & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\text{В то же время } S_{KLM} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} y_1 y_2 / 2p & (y_1 + y_2) / 2 & 1 \\ y_2 y_3 / 2p & (y_2 + y_3) / 2 & 1 \\ y_3 y_1 / 2p & (y_3 + y_1) / 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Отсюда находим } S_{KLM} = \frac{1}{2} S_{ABC}.$$

1.74. Две вершины треугольника зафиксированы, а третья движется так, что один из углов при основании остается вдвое больше другого. Какую линию описывает третья вершина? Построить ее.

Решение

Указание: вывести сначала уравнение кривой в полярных координатах r, φ . Две фиксированные вершины треугольника расположить на полярной оси, а координаты радиуса вектора точки M кривой выразить через φ и длину основания треугольника.

В соответствии с указанием сделаем рис. 5. Применяя теорию синусов, получаем:

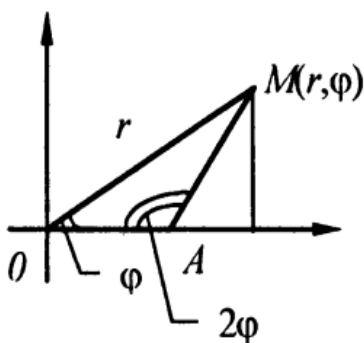


Рис. 5

$$\begin{aligned} \frac{r}{\sin 2\varphi} &= \frac{a}{\sin(\pi - 3\varphi)} \Rightarrow r = \frac{a \sin 2\varphi}{\sin 3\varphi} = \\ &= \frac{2a \sin \varphi \cos \varphi}{\sin 2\varphi \cos \varphi + \cos 2\varphi \sin \varphi} = \\ &= \frac{2a \sin \varphi \cos \varphi}{\sin \varphi (2 \cos^2 \varphi + \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)} = \\ &= \frac{2a \cos \varphi}{3 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, записываем

уравнение кривой в прямоугольных координатах. Имеем

$$r = \frac{2ax}{r(3x^2/r^2 - y^2/r^2)} \Rightarrow 1 = \frac{2ax}{3x^2 - y^2} \Rightarrow 3x^2 - 2ax - y^2 = 0. \quad \text{Выделяя}$$

полный квадрат, окончательно получаем $3(x - a/3)^2 - y^2 = a^2/3$, т.е. получаем гиперболу с центром в точке $(a/3; 0)$.

1.75. На плоскости задана замкнутая кусочно—гладкая кривая Γ , ограничивающая выпуклую центрально—симметричную область. Доказать, что в кривую Γ можно вписать аффинно правильный шестиугольник (т.е. образ правильного шестиугольника при некотором аффинном преобразовании).

Решение

Пусть O — центр симметрии, точки $A_0, B_0 \in \Gamma: A_0 B_0 = \text{diam} \Gamma$ (*). Тогда прямые l_{10} и l_{20} ($A_0 \in l_{10}, B_0 \in l_{20}; l_{10}, l_{20} \perp A_0 B_0$) пересекают Γ в одной точке (l_{10} — в точке A_0 , а l_{20} — в точке B_0), так как иначе по теореме Пифагора получаем противоречие с условием (*). Пусть прямая $l_0 \parallel l_{10}$ проходит через точку O , A_1 и A_2 — точки пересечения l_0 с Γ . Пусть l_1 — прямая между l_{10} и

l_0 , параллельная им и такая, что $l_1 \cap \Gamma = \{B_1, B_2\}$ и $B_1 B_2 = \frac{1}{2} A_1 A_2$ (существует по теореме о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции). Пусть l_2 симметрична l_1 относительно l_0 , $l_2 \cap \Gamma = \{C_1, C_2\}$, $C_1 C_2 = \frac{1}{2} A_1 A_2$. Пусть аффинное преобразование T переводит параллелограмм $B_1 B_2 A_2 O$ в ромб $B_1 B_2 A_2 O$ с ребром 1 и углом $\angle B_1 O A_2 = 2\pi/3$. Тогда T переводит $B_1 B_2 A_2 C_2 C_1 A_1$ в правильный шестиугольник и, значит, $B_1 B_2 A_2 C_2 C_1 A_1$ – искомый.

1.76. Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка эллипса, $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$. Какие значения может принимать произведение координат xy ? В каких точках достигаются наибольшее и наименьшее значения произведения?

Решение

Используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел и уравнение эллипса, можно записать, что:

$$1 = (x/a)^2 + (y/b)^2 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot y^2 / (a^2 b^2)} = 2|xy|/ab \Rightarrow |xy| \leq ab/2,$$

причем знак равенства имеет место только в случае $|x|/a = |y|/b$.

Итак, $|xy| \leq ab/2$, причем знак равенства достигается в точках эллипса: $M_1(a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2})$, $M_2(-a/\sqrt{2}, -b/\sqrt{2})$, $M_3(-a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2})$, $M_4(a/\sqrt{2}, -b/\sqrt{2})$.

1.77. Три прямые $r = r_i + a_i t (i=1, 2, 3)$ попарно не пересекаются и не параллельны одной плоскости. Выразить объем параллелепипеда, три ребра которого лежат на данных прямых, через векторы r_i и a_i .

Решение

Найдем прямую, параллельную третьей и пересекающую первую и вторую. Отрезок, ограниченный точками пересечения, будет ребром параллелепипеда. Для этого нужно найти такое γ , чтобы для некоторых α и β выполнялось равенство $r_1 + \alpha a_1 + \gamma a_3 = r_2 + \beta a_2$. Числа α, β и γ определяются однозначно, поскольку векторы a_1, a_2, a_3 , некомпланарны. Умножив равенство на $[a_1, a_2]$, получим $\gamma = (a_1, a_2, r_2 - r_1) / (a_1, a_2, a_3)$. Таким образом, вектор, задающий одно из ребер, имеет вид $a_3 \cdot (a_1, a_2, r_2 - r_1) / (a_1, a_2, a_3)$. Другие векторы находятся аналогично. Найдя смешанное произведение этих векторов, получим ответ

$$V = \left| \frac{(a_1, a_2, r_2 - r_1)(a_2, a_3, r_3 - r_2)(a_3, a_1, r_1 - r_3)}{(a_1, a_2, a_3)^2} \right|.$$

1.78. Найти уравнения сторон квадрата, описанного около эллипса $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.

Решение

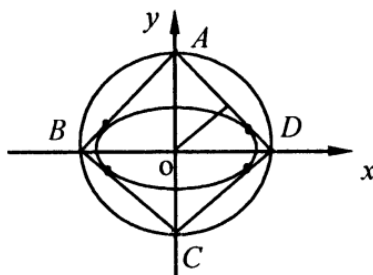


Рис. 6

Покажем сначала, что вершины описанного квадрата около эллипса $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ лежат на окружности $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. Сделаем рис. 6.

Пусть $A(x_1, y_1)$ – вершина квадрата, тогда стороны квадрата AB и AD , касающиеся эллипса, взаимно перпендикулярны. Уравнения прямых (AB) и (AD) можно записать в виде $y - y_1 = k(x - x_1)$ или $kx - y + y_1 - kx_1 = 0$.

Используя условие касания прямой и эллипса $a^2 A^2 + b^2 B^2 = C^2$, имеем $k^2 a^2 + b^2 = (y_1 - kx_1)^2 \Rightarrow k^2(a^2 - x_1^2) + 2x_1 y_1 + b^2 - y_1^2 = 0$.

Это уравнение определяет угловые коэффициенты k_1 и k_2 обеих касательных (AB) и (AD) . Тогда $k_1 k_2 = -1$ (условие перпендикулярности прямых). По теореме Виета получаем $k_1 k_2 = -1 = (b^2 - y_1^2) / (a^2 - x_1^2) \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = a^2 + b^2$. Отметим, что уравнению $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ удовлетворяют координаты вершины любого прямого угла, стороны которого касаются эллипса (как это следует из приведенного рассуждения). Запишем теперь уравнение касательной в виде $y = kx + m$. Тогда условие касания ее эллипса имеет вид $k^2 a^2 + b^2 = m^2$.

Центр эллипса $O(0,0)$ является центром квадрата. Расстояние от $O(0,0)$ до касательной $\sigma \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{d}{2}$, где d – длина стороны квадрата. Но $d = \sqrt{2}R = \sqrt{2(a^2 + b^2)}$. Тогда получим $m^2 / (1+k^2) = (a^2 + b^2) / 2$ или $(k^2 a^2 + b^2) / (1+k^2) = (a^2 + b^2) / 2 \Rightarrow \Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow k = \pm 1$ и $m = \pm \sqrt{a^2 + b^2}$.

Следовательно, уравнение сторон квадрата можно записать в виде $y = \pm \sqrt{a^2 + b^2} \pm x$.

1.79. Существуют ли ортогональное преобразование плоскости $\mathbb{R}^2$ и ограниченное множество $S \subset \mathbb{R}^2$ такие, что $f(S) \subset S$, но $f(S) \neq S$?

Решение

Пусть f – поворот плоскости вокруг точки O на угол $\pi\sqrt{2}$. Пусть $A_0 \neq O$ – произвольная точка, $A_n = f(A_{n-1})$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда $A_n \neq A_m$ при $n \neq m$, так как число $n\sqrt{2} - m\sqrt{2}$ не является целым. Пусть $S = \{A_0, A_1, \dots\}$, тогда $f(S) = \{A_1, A_2, \dots\} \subset S$, но $f(S) \neq S$.

1.80. На плоскости даны точки A_1, A_2, A_3, A_4 , никакие три из которых не лежат на одной прямой. Проведем две концентрические окружности: одну через точки A_1, A_2, A_3 , а другую через точку A_4 . Обозначим через $k(A_1, A_2, A_3, A_4)$ произведение площадей треугольника $A_1A_2A_3$ и получившегося кругового кольца. Доказать, что величина k не зависит от нумерации точек:

$$\begin{aligned} k(A_1, A_2, A_3, A_4) &= k(A_2, A_3, A_4, A_1) = k(A_3, A_4, A_1, A_2) = \\ &= k(A_4, A_1, A_2, A_3). \end{aligned}$$

Решение

Пусть (x_i, y_i) — координаты точек A_i в некоторой прямоугольной системе координат Oxy . Рассмотрим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 + y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 + y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 + y_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 + y_4^2 \end{vmatrix}.$$

Заметив, что при переносе начала координат Δ не меняется, перенесем начало координат в точку, являющуюся центром концентрических окружностей для разбиения (A_1, A_2, A_3, A_4) . Тогда в новой системе координат

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & r^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & r^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & r^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & R^2 \end{vmatrix} = (R^2 - r^2) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

$$\text{откуда } |\Delta| = |R - r| \cdot 2S_{A_1A_2A_3} = \frac{2}{\pi} k(A_1, A_2, A_3, A_4).$$

1.81. Доказать, что всякое непрерывное отображение окружности в прямую переводит некоторую пару диаметрально противоположных точек в одну точку.

Решение

Пусть $f : S \rightarrow \mathbb{I}$ непрерывна на единичной окружности комплексной плоскости. Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ непрерывную функцию $\varphi(t) = f(e^{\pi i(t+1)}) - f(e^{\pi i t})$. Тогда $\varphi(0) = f(-1) - f(1)$, $\varphi(1) = f(1) - f(-1) = -\varphi(0)$ и по теореме Коши найдется такая точка $t_0 \in [0,1]$, что $\varphi(t_0) = 0$, т.е. $f(e^{\pi i t_0}) = f(-e^{\pi i t_0})$.

1.82. Составить уравнения сторон квадрата, если две из них проходят через вершину $O(0;0)$, а на двух других сторонах лежат точки $(3;1)$ и $(8;6)$. Чему равна площадь S квадрата?

Решение

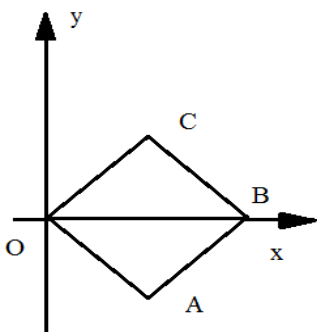


Рис. 7

Пусть $OABC$ – квадрат (см. рис.7), $M(3;1) \in (CB)$, $N(8;6) \in (AB)$. Пусть уравнение $(OA): y = kx$, тогда $(OC): y = -x/k$, ($k \neq 0$). Если бы $k = 0$, то стороны имели бы уравнения: $x = 0$, $y = 0$, $x = 3$, $y = 6$ и полученный прямоугольник не являлся бы квадратом. Расстояния δ_1 и δ_2 от точек M и N до противоположных сторон равны: $\delta_1 = \frac{|3k - 1|}{\sqrt{1 + k^2}} = \delta_2 = \frac{|6k + 8|}{\sqrt{1 + k^2}} \Rightarrow k_1 = -3$,

$$k_2 = -7/9.$$

Но $k = -7/9$, иначе прямая $(OC): y = x/3$ проходила бы через точку M , что невозможно. Итак, $(OC): y = 9x/7$, $(OA): y = -7x/9$. При $k = -7/9$ длина стороны квадрата $\delta_1 = \frac{|3(-7/9 - 1)|}{\sqrt{1 + (7/9)^2}} = \frac{30}{\sqrt{130}}$, поэтому его площадь $S = \delta_1^2 = 90/13$.

Уравнения сторон (AB) и (BC) имеют вид: $y - 6 = 9(x - 8)/7$, $y - 1 = -7(x - 3)/9$ или $9x - 7y - 20 = 0$ и $7x + 9y - 110 = 0$.

1.83. $\triangle ABC$, где $A(1; -1; 2), B(0; 0; -2), C(4; -4; 2)$, проектируется на некоторую плоскость в отрезок длиной $4\sqrt{3}$. Записать уравнение этой плоскости, зная, что она проходит через точку $M_0(1; 1; 1)$.

Решение

Указание: найти длины сторон $\triangle ABC$ и убедиться, что большая сторона его параллельна искомой плоскости, а плоскость $\triangle ABC$ к ней перпендикулярна.

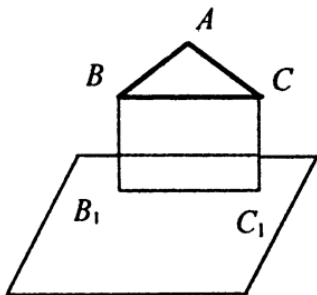


Рис. 8

В соответствии с указанием находим $\overrightarrow{AB}(-1; 1; 4), \overrightarrow{AC}(3; -3; 0), \overrightarrow{BC}(4; -4; 4)$, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{2} < |\overrightarrow{BC}| = 4\sqrt{3}$. Поэтому сторона BC $\triangle ABC$ проектируется на искомую плоскость в натуральную величину, т.е. $\overrightarrow{BC}$ параллельна искомой плоскости, а плоскость $\triangle ABC$ — перпендикулярна к ней (см. рис. 8). Пусть $\vec{n}(A_0, B_0, C_0)$ — нормаль к искомой плоскости, тогда ее уравнение $A_0(x - 1) + B_0(y - 1) + C_0(z - 1) = 0$, $\vec{n} \perp \overrightarrow{BC}$ и $\vec{n} \perp \vec{n}_1$, где $\vec{n}_1$ — нормаль к плоскости $\triangle ABC$. Поэтому за $\vec{n}$ можно взять $\overrightarrow{BC} \times \vec{n}_1$.

Имеем $\vec{n}_1 = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -12(\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k})$, $\vec{n} = \overrightarrow{BC} \times \vec{n}_1 = -12(\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k})$, и уравнение искомой плоскости будет иметь вид: $x - y - 2z + 2 = 0$.

1.84. Пусть P – периметр треугольника с целочисленными координатами вершин на плоскости Oxy , R – радиус описанной около треугольника окружности. Доказать неравенство $P^3 \geq 54R$.

Решение

Пусть a, b, c – стороны треугольника, тогда

$$\left(\frac{a+b+c}{3} \right)^3 \geq abc = 4SR \geq 2R,$$

так как площадь треугольника с целочисленными вершинами не менее $\frac{1}{2}$.

1.85. Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ освещена пучком лучей, параллельных прямой $x=0, y=z$. Найти уравнение границы тени на плоскости xOy .

Решение

Пусть $M_0(x_0; y_0; 0)$ – произвольная точка границы тени на плоскости xOy . Проведем через M_0 прямую, параллельную

прямой $\begin{cases} x=0, \\ y=z \end{cases}$ или $\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$. Имеем $\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{1} = \frac{z}{1}$. Эта

прямая касается сферы. Поэтому для нахождения координаты точки касания $M(x; y; z)$ получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x = x_0, \\ z = y - y_0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4z, \end{cases}$$

сводящуюся к квадратному уравнению $2y^2 - 2y(y_0 + 2) + x_0^2 + y_0^2 + 4y_0 = 0$. Это уравнение должно иметь равные корни, т.е. дискриминант его $D = ((y_0 + 2)^2 - 2(x_0^2 + y_0^2 + 4y_0))4 = 0$. Отсюда находим зависимость между координатами любой точки $M_0(x_0; y_0)$ границы тени на плоскости xOy , т.е. ее уравнение $(x_0 / 2)^2 + (y_0 + 2)^2 / 8 = 1$. Это эллипс с центром в точке $C(0; -2)$ и полуосями $a = 2, b = 2\sqrt{2}$.

1.86. Изобразить на плоскости xOy множество всех точек, координаты которых удовлетворяют соотношениям:

$$1) (x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 \leq 4;$$

$$2) (x - |x|/2)^2 + (y - |y|/2)^2 \leq 4;$$

$$3) (x - \sqrt{y})(3 - x^2 - 2y^2) \geq 0;$$

$$4) |3 - x| \geq y^2 - 1;$$

$$5) 0,5 \sin \pi U + U = 1 \text{ в случаях:}$$

$$a) U = x + y; \text{ б) } U = x^2 + 2y^2; \text{ в) } U = y - x^2.$$

Решение

1. Множество точек ограничено прямыми $y = -1 (x \geq 0)$, $x = -1 (y \geq 0)$ и дугой окружности $x^2 + y^2 = 1 (x < 0, y < 0)$.

2. Множество точек ограничено дугами кривых: эллипса $x^2 + 9y^2 = 16 (x \geq 0, y \geq 0)$, эллипса $9x^2 + y^2 = 16 (x < 0, y < 0)$, окружности $x^2 + y^2 = 16/9 (x < 0, y < 0)$, окружности $x^2 + y^2 = 16 (x > 0, y < 0)$.

3. Множество точек лежит в первом квадранте $(x \geq 0, y \geq 0)$ между параболой $\sqrt{y} = x$, эллипсом $x^2 + 2y^2 = 3$ и осью Ox , а

также в полуплоскости $y \geq 0$ выше эллипса $x^2 + 2y^2 = 3$ и левее параболы $\sqrt{y} = x$.

4. Множество точек заполняет внутренность параболы $y^2 = 4 - x$ и внутренность параболы $y^2 = x - 2$ правее параболы $y^2 = 4 - x$ (см. рис. 9).

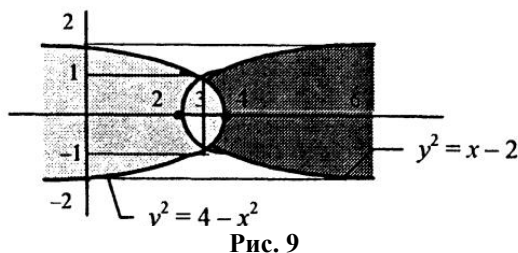


Рис. 9

$x + y = U_k$; б) – эллипсы $x^2 + 2y^2 = U_k$; в) – параболы $y - x^2 = U_k$, $k = 1, 2, 3$.

5. Уравнение $0,5 \sin \pi U = 1 - U$ имеет только три корня: $U_1 = 1$, $U_2 = 0,5$, $U_3 = 1,5$.

Поэтому множество точек заполняет линии в случае: а) – прямые

1.87 Поверхность $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ – многочлен степени не ниже второй, обладает свойством: *через любую ее точку можно провести две прямые, целиком лежащие на поверхности*. Доказать, что поверхность – гиперболический параболоид.

Решение

Примем за начало координат O какую-нибудь точку на поверхности. Ось Ox направим по одной образующей, ось Oy – по другой, ось Oz оставим прежней. В новых координатах уравнение поверхности имеет вид $z = g(x, y)$, где g – многочлен степени не ниже второй, $g(0, y) = g(x, 0) = 0$, т.е. $g(x, y) = xyh(x, y)$. Остается доказать, что $h(x, y) = \text{const}$.

Заметим, что если l – какая-либо образующая, а l_1 – ее проекция на плоскость Oxy , то функция g на прямой l_1 линейна.

Действительно, пусть l_1 имеет уравнение $x = x_0 + at, y = y_0 + bt$, тогда $g(x_0 + at, y_0 + bt) = z_0 + ct$.

Рассмотрим точку $(0, y_0, 0)$ на поверхности, $y_0 \neq 0$. Кроме оси Oy через эту точку проходит еще одна образующая l .

Запишем ее уравнение в виде $y = y_0 + ax, z = bx$. Тогда имеем тождественно по x :

$$bx = x(y_0 + ax)h(x, y_0 + ax). \quad (*)$$

Покажем, что $a = 0$. Если это не так, то из $(*)$ следует, что $h(x, y_0 + ax) = 0$ тождественно по x , т.е. многочлен g обращается в ноль на трех прямых: $x = 0, y = 0, y = y_0 + ax$. Возьмем любую точку (x_1, y_1) внутри треугольника, ограниченного этими прямыми. Рассмотрим одну из двух образующих, проходящих через точку $(x_1, y_1, g(x_1, y_1))$. Проекция этой образующей пересекает границу треугольника в двух точках, в этих точках g обращается в ноль. Так как g линейна на проекции образующей, то $g(x_1, y_1) = 0$ внутри треугольника, а значит, и везде, так как g – многочлен. Это противоречит тому, что $g \neq 0$ тождественно.

При $a = 0$ из $(*)$ получаем, что $h(x, y_0) = \alpha(y_0)$. Аналогично, рассматривая точку $(x_0, 0, 0)$, получим $h(x_0, y) = \beta(x_0)$. Тогда для любой точки (x_0, y_0) имеем $h(x_0, y_0) = \alpha(y_0) = \beta(x_0)$ и $h = \text{const}$.

1.88 Найти прямолинейные образующие заданной поверхности (т.е. прямые, лежащие на поверхности), проходящие через точку $M_0(1; 1; 1)$: 1) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$;

2) $2xy + yz - xz = 2$.

Решение

1. Запишем уравнения любой прямой, проходящей через точку $M_0(1;1;1)$: $\frac{x-1}{m} = \frac{y-1}{p} = \frac{z-1}{\ell} = t$ или в параметрическом виде: $x = mt + 1$; $y = pt + 1$; $z = \ell t + 1$. По определению прямолинейной образующей $\forall t \in R$ должно выполняться тождество: $(mt + 1)^2 + (pt + 1)^2 - (\ell t + 1)^2 = 1$, полученное из уравнения поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Из тождества $(m^2 + p^2 - \ell^2)t^2 + 2t(m + p - \ell) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m^2 + p^2 - \ell^2 = 0 \\ m + p - \ell = 0 \end{cases} \Rightarrow$
 $\Rightarrow m^2 - (p + \ell)m = 0$, $m(m - p - \ell) = 0 \Rightarrow$ а) $m = 0$, тогда $p = \ell$ и уравнения образующей будут: $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{p} = \frac{z-1}{p}$ или $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$; б) $m \neq 0$, тогда $\begin{cases} m = p + \ell \\ m = \ell - p \end{cases} \Rightarrow 2m = 2\ell$, $m = \ell$, $p = 0$ и уравнения образующей будут $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{1}$.

$$2. \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{1} \text{ и } \frac{x-1}{-6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

1.89 Доказать, что длина отрезка, соединяющего центр эллипса с любой его точкой, заключена между большой и малой полуосями.

Решение

Пусть дан эллипс $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$, причем $a > b$. Тогда для любой точки $M(x; y)$ эллипса $(x; y)$:
 $1 = (x/a)^2 + (y/b)^2 \leq (x^2 + y^2)/b^2 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq b^2$;
 $1 = (x/a)^2 + (y/b)^2 \geq (x^2 + y^2)/a^2 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq a^2$,
 т.е. $b \leq (x^2 + y^2)^{1/2} \leq a$.

1.90 Отрезок длиной $2a$ скользит своими концами по сторонам прямого угла. Найти уравнение геометрического места точек – оснований перпендикуляров, опущенных из вершины угла на отрезок.

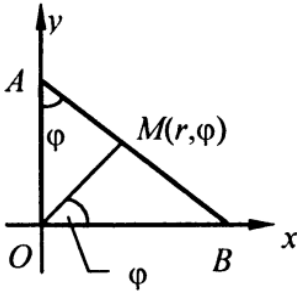


Рис. 10

Решение

Пусть стороны прямого угла совпадают с осями координат и M – основание перпендикуляра, опущенного из вершины O на отрезок $[AB]$ (рис. 10).

Полярная ось совмещена с осью Ox . Из $\triangle OMB$ находим $|OM| = r = |OB| \cos \varphi$, а из $\triangle AOB$ – $|OB| = |AB| \sin \varphi = 2a \sin \varphi$. Поэтому

$r = 2a \sin \varphi \cos \varphi = a \sin 2\varphi$, причем $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Следовательно, геометрическим местом оснований перпендикуляров будет один лепесток «розы» $r = a \sin 2\varphi$.

1.91 На плоскости заданы две точки $A(-1;1)$, $B(1;2,5)$ и взята точка $C(x;y)$ на кривой $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 1 = 0$. Какое наибольшее значение может иметь площадь $\triangle ABC$? Найти координаты точки C .

Решение

Запишем уравнение окружности в виде $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$, тогда $O_1(1;-2)$ – центр, а $R=2$ – радиус окружности. Точки $A(-1;1)$ и $B(1;2,5)$ лежат вне круга, так как, подставив координаты их в левую часть уравнений окружности, получим $(-2)^2 + 3^2 > 4$; $0^2 + (4,5)^2 > 4$ (рис. 11).

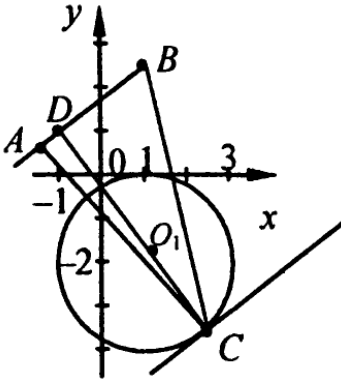


Рис. 11

Так как $(-2)^2 + 3^2 > 4; 0^2 + (4,5)^2 > 4$,
 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|AB|h$ и
 $|AB| = \sqrt{4 + 2,25} = 2,5$, то $S = \max$,
 если $h = \max$. Высота h будет
 максимальной, если касательная к
 окружности в точке C будет
 параллельна хорде AB , т.е. центр
 окружности будет наиболее

удален от $[AB]$. Поэтому

$$(AB):|O_1D| + |O_1C| = \delta + R = \delta + 2.$$

Найдем δ – расстояние от O_1 до $(AB): 3x - 4y + 7 = 0$. Имеем
 $\delta = |3 \times 1 - 4(-2) + 7| / 5 = 28/5$.

Итак, $S_{\max} = \frac{1}{2} \times 2,5 \times 28/5 = 7$. Для нахождения координат
 точки C запишем уравнение (DC) , зная, что она проходит
 через $O_1 \perp [AB]$. Имеем нормаль к (DC) $\vec{n} = \overline{AB}(2; 1,5)$, поэтому
 $2(x-1) + 1,5(y+2) = 0$, $(DC): 4x + 3y + 2 = 0$.

Координаты точки C найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4 \\ 4x + 3y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = -(3y+2)/4 \\ (y+2)^2 = 64/25 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} C_1(-1/5; -2/5), \\ C_2(11/5; -18/5). \end{matrix}$$

Сравнивая расстояния C_1 и C_2 до $(AB): 3x - 4y + 7 = 0$,
 $\delta_1 = 8/5$, заключаем, что C_2 – наиболее удаленная точка
 окружности.

1.92 Заданы уравнения двух сторон ромба $4x+3y-1=0$, $3x+4y+1=0$ и одна из его вершин $(-6;6)$. Найти площадь S ромба.

Решение

Пусть $ABCD$ – ромб. Из уравнений двух его сторон $4x+3y-1=0$ и $4x+3y+1=0$ видно, что это пересекающиеся стороны и вершина $(-6;6)$ не лежит на них.

Пусть 1-е уравнение – это (AB) , а 2-е – (AD) и $C(-6;6)$.

Решим задачу вторым способом. Найдем $\cos A$, $\hat{A} = (\vec{n}_1, \vec{n}_2)$, где $\vec{n}_1(4;3)$, $\vec{n}_2(3;4)$. Имеем $\cos A = \frac{\vec{n}_1 \vec{n}_2}{(|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|)} = 24/25 \Rightarrow \sin A = 7/25$. Далее, $S = a^2 \sin A = ah$, где a – сторона, а h – высота ромба. Так как $h = \delta$ – расстояние от точки C до (AB) , то $h = |4 - (6) + 3 \times 6 - 1|/5 = 7/5$. Поэтому $a = h / (\sin A) = 7/5 : 7/25 = 5$ и $S = 5 \times 7/5 = 7$.

1.93 Найти координаты точки M_0 прямой (l) , ближайшей к кривой (L) , и кратчайшее расстояние от M_0 до (L) :

1) $(l): 3x - 4y + 23 = 0$, $(L): x^2 - 2x + y^2 - 24 = 0$;

2) $(l): x + y + 7 = 0$; $(L): y^2 = 12x$;

3) $(l): x + y = 5$; $(L): 3x^2 + y^2 = 3$.

Решение

1. $M_0(-2, 12; 4, 16); 0, 2$.

2. $M_0(1; -8); 4$.

3. Убедимся, что у эллипса $x^2 + y^2/3 = 1$ нет общих точек с прямой $x + y = 5$. Это можно сделать двумя способами: а) найти

дискриминант квадратного уравнения, полученного исключением, например, y из системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x^2 + y^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow 3x^2 + (5 - x)^2 - 3 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 10x + 22 = 0 ;$$

$$L = 10^2 - 16 \cdot 22 < 0.$$

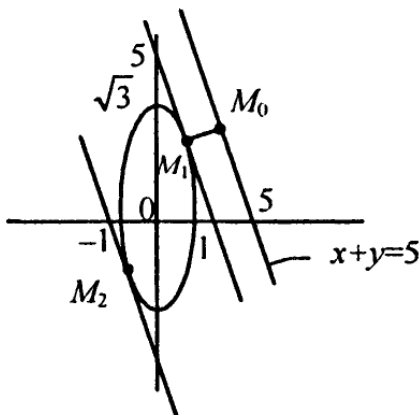


Рис. 12

Отметим, что этот способ применим всегда; б) при данном условии проще найти расстояние от центра эллипса $O(0;0)$ до прямой, убедившись, что оно $\sigma = 5/\sqrt{2} > \sqrt{3}$ больше большей полуоси – наибольшего расстояния от центра эллипса до любой его точки (см. также рис. 12). Для нахождения кратчайшего расстояния от эллипса до прямой проведем

касательную к эллипсу, параллельную прямой, ее уравнение $x + y = c$. Для нахождения c найдем дискриминант квадратного уравнения $3x^2 + (c - x)^2 = 3$ и приравняем его нулю.

Имеем $L = 4(12 - 3c^2) = 0 \Rightarrow c = \pm 2$. Получим две касательные $x + y = 2$ и $x - y = -2$. Ближайшей к прямой $x + y = 5$ будет точка касания M_1 , а M_2 – наиболее удаленная от этой прямой точка эллипса. Координаты точек M_1 и M_2 получаем из рассмотренного квадратного уравнения при $c = \pm 2$ (абсциссы) $x = \pm 1/2$, а ординаты – из уравнения эллипса $y^2 = 3 - 3 \cdot (1/4) = 3 \cdot 3/4 \Rightarrow y = \pm 3/2$. Итак, $M_1(1/2, 3/2)$, $M_2(-1/2, 3/2)$ (см. рис. 10). Для нахождения точки M_0 прямой, ближайшей к эллипсу, найдем уравнение (M_1, M_0) – прямой, перпендикулярной к $x + y = 5$ и проходящей через точку M_1 .

Имеем $x - 1/2 = y - 3/2 \Rightarrow x - y + 1 = 0$ и решаем систему уравнений: $\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2; y = 3$. Итак, $M_0(2, 3)$.

1.94 Найти геометрическое место центров кругов, отсекающих от двух перпендикулярных прямых отрезки $2a$ и $2b$.

Решение

Пусть $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ — окружность, отсекающая на оси Ox отрезок $2a$ и на Oy — $2b$. Тогда при $y = 0$ имеем $(x - x_0)^2 = R^2 - y_0^2$, а при $x = 0$ — $(y - y_0)^2 = R^2 - x_0^2$. По условию $R^2 - y_0^2 = a^2$, $R^2 - x_0^2 = b^2$. Вычитая почленно последние равенства, получаем $x_0^2 - y_0^2 = a^2 - b^2$. Следовательно, при $a \neq b$ точка C описывает равнобочную гиперболу $x^2 - y^2 = a^2 + b^2$, а при $a = b$ — пару прямых $-y = \pm x$.

1.95 Окружность $\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4, \\ 2x + 2y + z = 0 \end{cases}$ проектируется на

некоторую плоскость, проходящую через $O(0;0;0)$, в отрезок прямой. Составить уравнение этой плоскости, зная, что она отстоит от центра окружности на расстояние $\frac{1}{2}$ ее радиуса.

Решение

Так как центр $C(1; -1; 0)$ сферы принадлежит плоскости $2x + 2y + z = 0 \Rightarrow 2 - 2 + 0 = 0$, то заданная окружность — окружность большого круга сферы, т.е. C — центр окружности и ее радиус также равен $R = 2$. Уравнение искомой плоскости будем искать в виде $\alpha x + \beta y + z = 0$. Для нахождения α и β используем, что эта плоскость перпендикулярна к плоскости

$2x+2y+z=0$, т.е. $\vec{n}_1(\alpha, \beta, 1) \perp \vec{n}_2(2, 2, 1)$ и $\vec{n}_1 \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow 2\alpha + 2\beta + 1 = 0$.

Второе уравнение для нахождения α , β получаем, пользуясь тем, что расстояние от $C(1; -1; 0)$ до искомой плоскости равно $1/2R=1$; $|\alpha \cdot 1 - \beta \cdot 1 + 0| / \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1} = 1$. Из системы уравнений

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta + 1 = 0, \\ \alpha^2 + \beta^2 + 1 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 2\beta + 1 = 0, \\ 2\alpha\beta = -1 \end{cases}$$

находим $\alpha_1 = -1, \beta_1 = 1/2, \alpha_2 = 1/2, \beta_2 = -1$. Следовательно, искомая плоскость может иметь уравнение $x - 2y + 2z = 0$ или $2x - y - 2z = 0$. Не трудно проверить, что эти плоскости взаимно перпендикулярны и перпендикулярны к плоскости $2x + 2y + z = 0$, в которой лежит окружность.

1.96. Дан треугольник с вершинами $A(0; -4)$, $B(3; 0)$, $C(0; 6)$. Найти расстояние от вершины C до биссектрисы A .

Решение

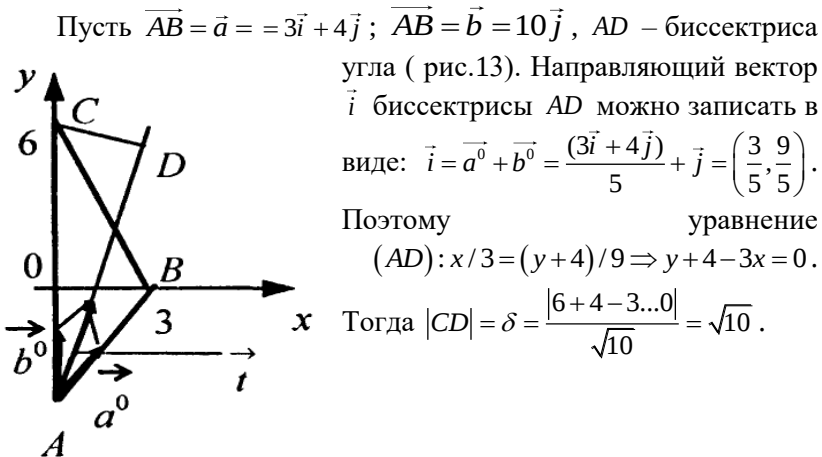


Рис. 13

1.97. Кривая задана уравнением $r = 3 + \cos \varphi$ (r и φ – полярные координаты точки). Показать, что любая хорда, проходящая через полюс, имеет одну и ту же длину.

Решение

Кривая симметрична относительно полярной оси, так как $r(-\varphi) = 3 + \cos(-\varphi) = 3 + \cos \varphi = r(\varphi)$.

Пусть $A(r(\varphi), \varphi), B(r(\varphi + \pi), \varphi + \pi)$ – концы хорды кривой, тогда $|AB| = r(\varphi) + r(\varphi + \pi) = 3 + \cos \varphi + 3 \cos(\varphi + \pi) = 6$.

1.98. Окружность вписана: 1) в квадрат; 2) в правильный треугольник. Доказать, что сумма квадратов расстояний от любой точки окружности до вершин фигуры постоянна. Найти эти постоянные

Решение

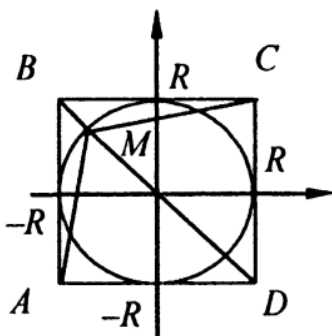


Рис. 14

1. Пусть $x^2 + y^2 = R^2$ – окружность, вписанная в квадрат $ABCD$ (см. рис. 14), и $M(x; y)$ – произвольная точка окружности. Тогда вершины квадрата имеют координаты: $A(-R; -R)$, $B(-R; R)$, $C(R; R)$, $D(R; -R)$.

Имеем $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 =$

$$= (x+R)^2(y+R)^2 + (x+R)^2 + (y-R)^2 + (x-R)^2 + (y-R)^2 + (x-R)^2 + (y+R)^2 = 4(x^2 + y^2 + 2R^2) = 4(R^2 + 2R^2) = 12R^2 = 3a^2,$$
 где a – сторона квадрата.

2. $5a^2/4$, где a – сторона правильного треугольника.

1.99. На плоскости расположены две параболы так, что их оси взаимно перпендикулярны, а сами параболы пересекаются в 4-х точках. Докажите, что эти четыре точки лежат на одной окружности.

Решение

Сделаем рис. 15, выбрав систему координат так, чтобы оси парабол совпадали с осями координат. Уравнения парабол можно записать в виде $x^2 = -2p(y - y_0)$ и $y^2 = 2q(x - x_0)$, где $x_0 < 0$, $y_0 > 0$. Координаты точек пересечения парабол M_k , $k = \overline{1, 4}$, удовлетворяют системе уравнений:

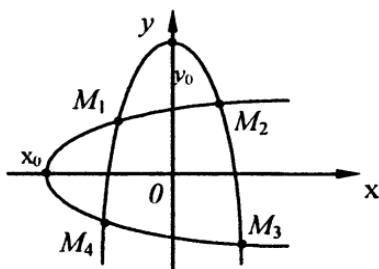


Рис. 15

$$\begin{cases} x^2 = -2p(y - y_0), \\ y^2 = 2q(x - x_0). \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, получаем

$$x^2 + y^2 + 2py -$$

$-2qx = 2py_0 - 2x_0q \Rightarrow (x - q)^2 + (y + p)^2 = p^2 + q^2 + 2py_0 - 2x_0q$, так как правая часть равенства положительная, то получаем окружность радиусом $R = \sqrt{p^2 + q^2 + 2(py_0 - x_0q)}$ с центром в точке $(q, -p)$.

1.100. Фокусы эллипса находятся в точках $F_1(1;0), F_2(0;1)$, а большая ось равна 2. Составить уравнение эллипса.

Решение

Найдем уравнение эллипса, используя определение эллипса. Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка эллипса, тогда $|MF_1| + |MF_2| = 2a$; используя условия: $F_1(1;0), F_2(0;1)$, $2a = 2$, имеем $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 2$. Избавляясь от корней, получаем, что уравнение эллипса имеет вид $3(x^2 + y^2) - 4(x - y) + 2xy = 0$.

Приведем второй способ решения. Из условия следует, что осями симметрии эллипса будут прямые $(F_1, F_2): x+y=1$ и $y=x$, а O_1 – центр эллипса (см. рис. 16) будет иметь координаты $O_1\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Найдем абсциссу x вершины A_1 , ее ордината – $y=1-x$. Имеем:

$$|O_1A_1|^2 = 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - x - \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 1, \quad x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}},$$

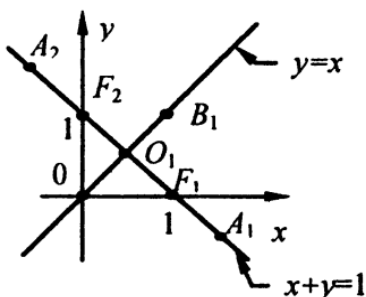


Рис. 16

т.е. $A_1(1/2 + 1/\sqrt{2}; 1/2 - 1/\sqrt{2})$,
тогда $A_2(1/2 - 1/\sqrt{2}; 1/2 + 1/\sqrt{2})$.
Так как эллипс симметричен относительно $y=x$, то его уравнение не должно меняться при замене y на x и x на y . Поэтому будем искать уравнение эллипса в виде $A(x^2 + y^2) + Bxy + C(x+y) + D = 0$ или

$x^2 + y^2 + B_0xy + C_0(x+y) + D_0 = 0$. Покажем, что $D_0 = 0$, для чего найдем координаты вершин B_1, B_2 , лежащих на прямой $y=x$. Найдем сначала малую полуось b . Так как для эллипса $a^2 - c^2 = b^2$ и $a=1$, $c = |O_1F| = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, то $b^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,

т.е. $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Имеем $B_1(x; x)$, $|B_1O_1| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} \Rightarrow 1 = 2\left|x - \frac{1}{2}\right| \Rightarrow x - \frac{1}{2} = \pm \frac{1}{2}$;
 $x_1=1; x_2=0$, поэтому $B_1(1;1), B_2(0;0)$ и $D_0 = 0$. Осталось определить коэффициенты B_0 и C_0 . Подставляя в уравнение эллипса координаты точек $B_1(1;1)$ и $A_1((1+\sqrt{2})/2; (1-\sqrt{2})/2)$, получаем уравнение для нахождения B_1 и C_1 :

$B_0 + 2C_0 = -2; B_0 - 4C_0 = 6 \Rightarrow B_0 = 2/3; C_0 = -4/3$. Следовательно, уравнение эллипса принимает тот же вид, что и в решении, полученном 1-м способом.

Наконец, можно получить уравнение эллипса, используя формулы преобразования координат «поворот» и «перенос».

1.101. Найти геометрическое место точек, из которых на ровной местности выстрел из винтовки и удар пули, попавший в цель, слышны в одно и то же мгновение. Скорость звука – V , пули V_1 , а расстояние между стрелявшим и мишенью $a = \text{const}$.

Решение

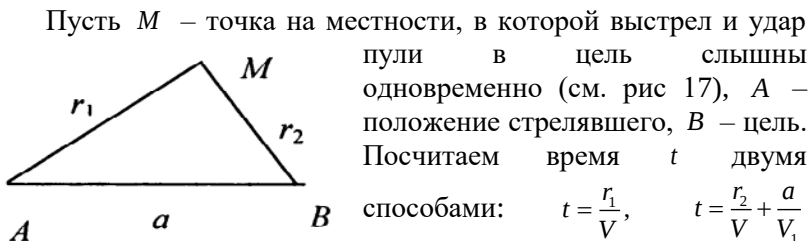


Рис. 17

(очевидно, $V_1 > V$). Тогда разность

$$r_1 - r_2 = \frac{aV}{V_1} = \text{const}, \text{ т.е. геометрическое место точек } M - \text{ ветвь}$$

гиперболы. Это уравнение можно записать в виде $(1 - m^2)x^2 - m^2y^2 = (am)^2(1 - m^2)$, где $m = V/V_1 < 1$, причем рассматривается ветвь гиперболы, расположенная ближе к цели.

1.102. Через точку $(1; 4; 1)$ провести плоскость, касающуюся парабол: $y = 0$, $z^2 = 8x$ и $z = 0$, $y^2 = 32x$.

Решение

Уравнение искомой плоскости запишем в виде $x - 1 + \alpha(y - 4) + \beta(z - 1) = 0$. Из условий касания плоскости

параболы $y=0$, $z^2=8x$ получаем $x=1+4\alpha-\beta(z-1) \Rightarrow \Rightarrow z^2+8\beta z-8\beta-32\alpha-8=0$. Приравнявая дискриминант квадратного уравнения к нулю, получаем $2\beta^2+\beta+4\alpha+1=0$, из условий касания 2-й параболы аналогично получаем $8\alpha^2+4\alpha+\beta+1=0$. Находим: $\alpha_1=-0,5$; $\beta_1=-1$; $\alpha_2=-0,25$; $\beta_2=-0,5$ и получаем уравнения 2-х касательных плоскостей: $2x-y-2z+4=0$ и $4x-y-2z+2=0$.

1.103. На эллипсе $x^2+xy+y^2=9$ взяты две точки $A(0;3)$ и $B(3;-3)$. Указать на нем такую точку C , чтобы площадь $S_{\triangle ABC}$ была наибольшей. Найти эту площадь и эксцентриситет эллипса.

Решение

Так как уравнение эллипса $x^2+xy+y^2=9$ не изменяется при замене y на x и x на y , то он симметричен относительно прямой $y=x$, $y=-x$ — 2-я ось симметрии (уравнение не изменяется также при замене x на $-y$ и y на $-x$). Поэтому

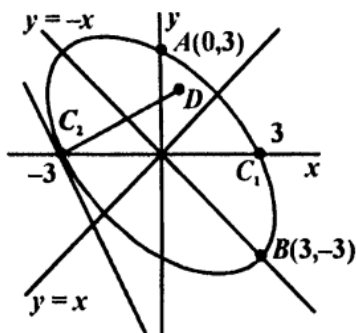


Рис. 18

центр эллипса $O(0;0)$ — точка пересечения осей симметрии. Эллипс изображен на рис. 18.

$S_{\triangle ABC} = S = \max$, если высота $|CD| = \max$, так как основание $|AB| = \sqrt{3^2+6^2} = 3\sqrt{5}$ — число.

$$S = 1/2 |CD| |AB| = \frac{1}{2} h \cdot 3\sqrt{5},$$

$h = \max$, если касательная в точке C эллипса будет параллельна хорде (AB) .

Уравнение $(AB): y=3-2x$, поэтому уравнение касательной можно записать в виде $y=m-2x$. Подберем m так, чтобы эта

прямая имела с эллипсом только одну общую точку. Имеем $9 = x^2 + y(x + y) = x^2 + (m - 2x)(x + m - 2x) \Rightarrow 3x^2 - 3mx + m^2 - 9 = 0$.

Найдем дискриминант квадратного уравнения и приравняем его к нулю: $D = 9m^2 - 12(m^2 - 9) = 0 \Rightarrow m^2 = 36, m = \pm 6$. При $m = 6$ получим $x_1 = 3, y_1 = 6 - 2x_1 = 0$, если $m = -6$, получим $x_2 = -3, y_2 = 0$. Получили две точки: $C_1(3; 0)$ и $C_2(-3; 0)$. Наиболее удаленной от $[AB]$ будет C_2 . $h_{\max} = |C_2 D| = |3 - 2x_2 - y_2| / \sqrt{5} = 9\sqrt{5}$.

Поэтому $S_{\max} = (1/2) \cdot (9\sqrt{5}) \cdot 3\sqrt{5} = 13,5$. Для нахождения эксцентриситета эллипса ε найдем полуоси эллипса: $|OB| = a = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$ [$B(3; -3)$ — одна из вершин эллипса]. Координаты точки M найдем из системы уравнений (пересечение эллипса с осью симметрии $y = +x$):

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 9 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow 3x^2 = 9, x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}.$$

Поэтому $M(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ и $b = |OM| = \sqrt{6}$. Имеем

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{6}}; \varepsilon = \sqrt{\frac{5}{6}}.$$

1.104. Числа x и y удовлетворяют неравенствам:

$$1) \ x^2 - 2x + y^2 - 8 \leq 0 \text{ и } x^2 - 4x + y^2 - 6y - 3 \leq 0; \quad 2) \ x^2 \leq y \leq 4 + \sqrt{4 - x^2}.$$

Какие значения может принимать сумма $U = 3x + 4y$?

Решение

$$1. \ -2 \leq U \leq 18.$$

2. Неравенство $x^2 \leq y \leq 4 + \sqrt{4 - x^2}$ означает, что область изменения (x, y) ограничена параболой $y = x^2$ (снизу), а сверху — полуокружностью $y = 4 + \sqrt{4 - x^2}$ (см. рис. 19). Отметим, что $x^2 \leq y \leq 4 + \sqrt{4 - x^2}$, так как $x^2 \leq 4$, а первая часть ≥ 4 . Из рис. 19

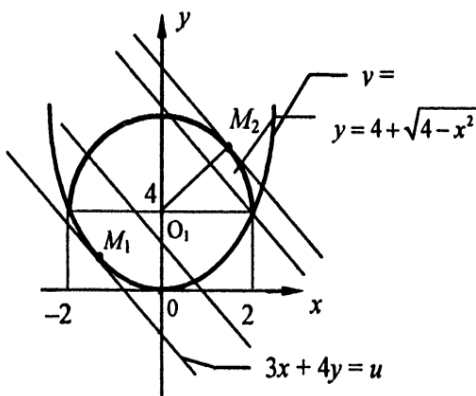


Рис. 19

видно, что при перемещении прямой $3x + 4y = U$ параллельно самой себе (при изменении U): $U_1 = U_{\min} = U(x_1, y_1)$, где (x_1, y_1) – координаты точки M_1 , в которой прямая касается параболы, а $U_2 = U_{\max}$ достигается в точке $M_2(x_2, y_2)$, в которой прямая касается

окружности. Значение U_2 находим из условия касания окружности и прямой:

$$|3 \times 0 + 4 \times 4 - U_2| / \sqrt{9 + 16} = R = 2 \Rightarrow |U_2 - 16| = 10 \Rightarrow U_2^{(1)} = 26,$$

$U_2^{(2)} = 6$, $U_{\max} = 26$. Можно доказать, что $M_2(6/5; 28/5)$ и $U(x_2, y_2) = 26$. Для нахождения U_1 используем условие касания параболы $y = x^2$ и прямой $pk^2 + 2b = 0$, где $x^2 = 2py$ – парабола, а $y = kx + b$ – прямая. В нашем случае $p = 1/2$, $k = -3/4$, $b = U_1/4$, т.е. $(1/2) \times (9/16) + U_1/2 = 0 \Rightarrow U_1 = U_{\min} = -9/16$.

1.105. Составить уравнение сферы, проходящей через окружность $\begin{cases} x^2 + y^2 = 11, \\ z = 0; \end{cases}$ и касающейся плоскости $x + y + z - 5 = 0$.

Решение

Пусть $O(0; 0; z_0)$ – центр искомой сферы, R – ее радиус. Тогда расстояние от O до $O_1(0; 0; 0)$ – центра заданной окружности равно $|OO_1| = |z_0|$ (как расстояние от O до плоскости

$z=0$). Тогда $R^2 = 11 + z_0^2$, где $r = \sqrt{11}$ — радиус данной окружности. С другой стороны, R — это расстояние от центра сферы O до касательной плоскости $x + y + z - 5 = 0$, т.е.

$$R = |z_0 - 5| / \sqrt{3}. \text{ Из системы уравнений } \begin{cases} R^2 = 11 + z_0^2, \\ |z_0 - 5| / \sqrt{3} = R \end{cases} \text{ находим}$$

z_0 и R .

$z_0^{(1)} = -1$; $z_0^{(2)} = -4$; $R_1 = 11 + 1 = 12$; $R_2 = 11 + 16 = 27$. Итак, получим две сферы: $x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 12$ и $x^2 + y^2 + (z+4)^2 = 27$.

1.106. Прямоугольный треугольник с катетами a и b скользит их концами по осям координат. Найти геометрическое место вершин прямого угла.

Решение

Пусть $CB = a$ и $CA = b$ — катеты $\triangle ABC$ и $C(x_0, y_0)$ — вершина прямого угла (см. рис. 20). Имеем: $|MA| = \sqrt{b^2 - y_0^2}$,

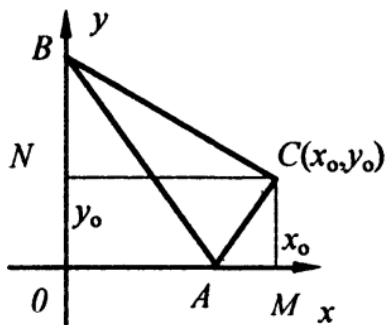


Рис. 20

$$|OA| = x_0 - |MA| = x_0 - \sqrt{b^2 - y_0^2},$$

$$|BN| = \sqrt{a^2 - x_0^2}, \quad |ON| = y_0,$$

$$|BO| = y_0 + \sqrt{a^2 - x_0^2}. \text{ Так как}$$

$$|OB|^2 = |OA|^2 = |AB|^2 = a^2 + b^2, \text{ то}$$

получаем:

$$\begin{aligned} (y_0 + \sqrt{a^2 - x_0^2})^2 + (x_0 - \sqrt{b^2 - y_0^2})^2 &= \\ &= a^2 + b^2 \Rightarrow y_0 \sqrt{a^2 - x_0^2} = \end{aligned}$$

$$= x_0 \sqrt{b^2 - y_0^2} \Rightarrow y^2 a^2 = x^2 b^2 \Rightarrow y = \pm bx / a.$$

Замечание. Если считать, что точка C движется в 1-м квадранте ($x_0 > 0, y_0 > 0$), то $y = bx / a$.

1.107. Найти кратчайшее расстояние от точки $M_0(0; -1; 1)$ до окружности $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 4y - 6z + 24 = 0, \\ 2x + 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$ и координаты центра этой окружности.

Решение

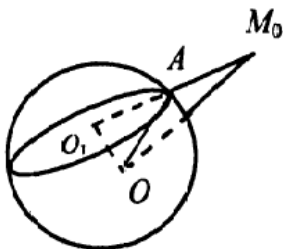


Рис. 21

Запишем уравнение сферы в виде: $(x-6)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$.

Так как $6^2 + 1 + 4 > 25$, то точка $M_0(0; -1; 1)$ лежит вне сферы, а значит, и вне окружности, но $M_0 \in$ плоскости $2x + 2y + z + 1 = 0$, ибо $2 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 1 + 1 = 0$ (см. рис. 21).

Тогда $\sigma_{\min} = |AM_0| = |O_1M_0| - r, r = |O_1A|$.

Найдем r , для чего сначала определим $\sigma_1 = |OO_1| = |2 \cdot 6 + 2 \cdot (-2) + 3 + 1| / 3 = 4$. Так как гипотенуза прямоугольного треугольника O_1OA $|OA| = R = 5$, то $|O_1A| = r = 3$.

Далее $|OM_0| = \sqrt{41}$, поэтому из $\triangle OO_1M_0$ находим $|O_1M_0| = \sqrt{|OM_0|^2 - \sigma_1^2} = \sqrt{41 - 16} = 5$. Итак, кратчайшее расстояние от M_0 до окружности $\sigma_{\min} = |O_1M_0| - r = 5 - 3 = 2$.

Для нахождения координат центра O_1 окружности найдем точку пересечения прямой (OO_1) с плоскостью $2x + 2y + z + 1 = 0$, в которой лежит окружность. $(OO_1) \perp$ этой плоскости, поэтому уравнение (OO_1) имеет вид: $\frac{x-6}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{1} = t$ или в параметрическом виде $x = 2t + 6, y = 2t - 2, z = t + 3$. Из уравнения $2(2t + 6) + 2(2t - 2) + t + 3 + 1 = 0$ находим $t = -4/3$. Следовательно, $O_1(10/3; -14/3; 5/3)$.

ГЛАВА 2. ПРЕДЕЛЫ

Основные приёмы, используемые при вычислении пределов.

1. Раскрытие неопределённостей:

а) вынести в числителе и знаменателе множители, порождающие неопределённость и сократить их;

б) применить правило Лопиталя (возможно несколько раз):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

при этом из существования предела отношения производных следует существование предела отношения функций, но не наоборот;

в) использовать замену бесконечно малых и бесконечно больших на эквивалентные. Чаще всего встречаются замены при $x \rightarrow 0$:

$$x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \operatorname{tg} x \sim \operatorname{arctg} x;$$

$$x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x) \sim \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha};$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad \log_b(1+x) \sim x \log_b e, \quad a^x - 1 \sim x \ln a.$$

Отметим, что при $x \rightarrow x_0$ утверждения « $f(x) \sim g(x)$ » и « $g(x)$ есть главная часть $f(x)$ » равносильны. Так как функция $f(x)$ имеет бесконечное множество эквивалентных функций, то при постановке задачи выделения главной части $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, т.е. нахождении эквивалентной функции, указывается, какой именно вид эта главная часть должна иметь;

г) иногда соотношения эквивалентности могут оказаться недостаточными для определения главной части функции при

$x \rightarrow x_0$. В таком случае одним из методов определения главной части является разложение функции в многочлен Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o(x - x_0)^n$$

с остаточным членом в форме Пеано. При этом важно, с одной стороны, не потерять члены нужного порядка, взяв слишком малую степень многочлена Тейлора, а с другой – не выписывать лишних членов, так как это загромождает и затрудняет выкладки. Поэтому при вычислении пределов полезно оценить заранее, какого порядка малости погрешность уже не влияет на предел соответствующего выражения. Мы не приводим здесь табличных разложений элементарных функций, так как они имеются в любом учебнике по математическому анализу.

2. Рекуррентно заданная последовательность

Задача о пределе рекуррентно заданной последовательности

$$a_{n+1} = f(a_n),$$

как правило, сводится к доказательству существования предела, а затем к его вычислению. Для доказательства существования предела чаще всего используются теоремы:

а) если последовательность монотонно убывает (возрастает) и ограничена снизу (сверху), то она имеет предел;

б) если имеются две последовательности b_n и c_n , такие что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a \text{ и } b_n \leq a_n \leq c_n, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a;$$

в) после того как будет доказано, что предел $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ существует, его можно найти из уравнения $a = f(a)$;

г) в рекуррентной последовательности бывает полезна замена $\beta_n = a_n - a$, где a – предполагаемый предел.

3. Другие приёмы:

а) если предел содержит большие суммы или произведения, то можно попробовать их расписать и сокращать. Можно также использовать связь суммы и произведения:

$$\ln \prod_n y_n = \sum_n \ln y_n ;$$

б) теорема Штольца. Пусть x_n — возрастающая последовательность, $x_n \rightarrow \infty$, тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} ,$$

причём из существования второго предела следует существование первого, но не наоборот;

в) если предел содержит параметр, то надо выяснить, при каких значениях нет неопределённости, а при каких значениях она есть. После этого найти соответствующие пределы;

г) если удастся «угадать» значение предела (наиболее часто он оказывается равным нулю), то решение сведётся к доказательству того, что это так. Например, чтобы доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 , \text{ можно рассмотреть ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ и доказать, что он}$$

сходится, поскольку общий член сходящегося ряда стремится к нулю.

Задачи

2.1. Отметим, что одна из самых распространённых ошибок при вычислении предела некоторого выражения заключается в замене функции, не являющейся множителем всего этого выражения, на эквивалентную функцию.

Поясним на примере.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos 2x - \sin^2 2x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^2 2x)^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^4}{x^4} = 4. \text{ Однако если}$$

сделать эквивалентные замены при $x \rightarrow 0$

$$2 - 2 \cos 2x \sim 4x^2 \text{ и } \sin^2 2x \sim 4x^2,$$

то получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos 2x - \sin^2 2x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - 4x^2}{x^4} = 0, \text{ что неверно!}$$

2.2. Вычислить предел функции

$$f(x) = \frac{\sqrt{x + \sqrt[3]{x^2}} \ln \frac{1-x^2}{1+x^2}}{\sqrt[3]{x^7}} \text{ при } x \rightarrow 0^+.$$

Решение

Для раскрытия неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$ найдём главную часть вида Cx^α для функции $g(x) = \sqrt{x + \sqrt[3]{x^2}} \ln \frac{1-x^2}{1+x^2}$ при $x \rightarrow 0^+$.

Имеем

$$\sqrt{x + \sqrt[3]{x^2}} \ln \frac{1-x^2}{1+x^2} = |x|^{\frac{1}{3}} \sqrt{x^{\frac{1}{3}} + 1} \ln \left(1 - \frac{2x^2}{1+x^2}\right) \sim |x|^{\frac{1}{3}} (-2x^2) \sim -2|x|^{7/3}.$$

Следовательно, главной частью $g(x)$ при $x \rightarrow 0^+$ является функция $-2|x|^{7/3}$. Тогда искомый предел равен

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x + \sqrt[3]{x^2}} \ln \frac{1-x^2}{1+x^2}}{\sqrt[3]{x^7}} = \frac{-2|x|^{7/3}}{x^{7/3}} = -2.$$

Заметим, что левостороннего предела $f(x)$ ($x \rightarrow 0^-$) не существует.

2.3. Вычислить предел функции

$$f(x) = \left(\operatorname{arctg} x - \arccos \frac{1}{x} \right) x^3 \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

Решение

Так как $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{arctg} x - \arccos \frac{1}{x} \right) = 0$, то имеем неопределённость $(0 \cdot \infty)$. При $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \left(\operatorname{arctg} x - \arccos \frac{1}{x} \right) &\sim \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} x - \arccos \frac{1}{x} \right) = \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{1 + x\sqrt{x^2 - 1}} = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \frac{1}{x^2 \left(\frac{1}{x^2} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)} \sim \frac{1}{x^2} \frac{1}{x \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)} \sim \frac{1}{2x^3}. \end{aligned}$$

Итак, главной частью функции $\left(\operatorname{arctg} x - \arccos \frac{1}{x} \right)$ является функция $1/2x^3$, а искомый предел равен

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{arctg} x - \arccos \frac{1}{x} \right) x^3 = \frac{1}{2x^3} x^3 = \frac{1}{2}.$$

2.4. Вычислить предел функции

$$f(x) = \frac{\sin x - \ln \left(1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} \right)}{x^5} \text{ при } x \rightarrow 0.$$

Решение

Найдём главную часть вида $C|x|^\alpha$ функции

$$g(x) = \sin x - \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}\right) \text{ при } x \rightarrow 0.$$

Воспользовавшись разложением функций $\sin x$ и $\ln(1+x)$ в многочлены Тейлора, пишем последовательно многочлены Тейлора функции $g(x)$ в нулевой точке увеличивающегося порядка, пока не получим многочлен, отличный от нуля.

Для первого порядка имеем

$$g(x) = \sin x - \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}\right) = (x + o(x)) - (x + o(x)) = o(x)$$

при $x \rightarrow 0$, то есть $g_1(x) \equiv 0$. Для второго порядка

$$g(x) = (x + o(x^2)) - \left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) = o(x^2),$$

то есть $g_2(x) \equiv 0$. Для третьего порядка

$$g(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^2)\right) - \left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}(x^2 + x^3) + \frac{1}{3}x^3 + o(x^2)\right) = o(x^3),$$

то есть $g_3(x) \equiv 0$. Для четвертого порядка

$$g(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) - \left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{1}{2}\left(x^2 + x^3 + \frac{x^4}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(x^3 + \frac{3x^4}{2}\right) - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)\right) = o(x^4),$$

то есть $g_4(x) \equiv 0$. Для пятого порядка

$$g(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right) - \left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{1}{2} \left(x^2 + x^3 + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{4} \right) + \frac{1}{3} \left(x^3 + \frac{3x^4}{2} + \frac{3x^5}{4} \right) - \frac{1}{4} (x^4 + 2x^5) + \frac{1}{5} x^5 + o(x^5) \right) = -\frac{1}{15} x^5 + o(x^5),$$

то есть $g_5(x) = -\frac{1}{15}x^5$, и данная степенная функция есть главная

часть функции $g(x) = \sin x - \ln \left(1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} \right)$ при $x \rightarrow 0$.

Таким образом, искомый предел равен

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln \left(1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} \right)}{x^5} = -\frac{1}{15}.$$

2.5. Пусть последовательность $\{a_n\}$ задана как $a_1 = 1$

$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1, \forall n \in N$. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Решение

Выясним, существует ли $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Методом математической индукции проверяем, что для любого n справедливо $a_n < 2$. Отсюда следует, что $a_{n+1} - a_n = 1 - a_n/2 > 0$. Таким образом, последовательность $\{a_n\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху, следовательно, последовательность $\{a_n\}$ имеет предел.

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. Переходя к пределу в рекуррентном соотношении $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1$, получаем $A = A/2 + 1$, откуда $A = 2$. Таким образом, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

2.6. Пусть $a_n = \sqrt[n]{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}}$. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Решение

Очевидно, что последовательность $\{a_n\}$ возрастающая. Для того чтобы существовал её предел, достаточно доказать, что она ограничена сверху. Заменяя в последнем корне «2» на «4», тем самым увеличив a_n , получим, что для любого n выполняется $a_n < 2$. Итак, искомый предел существует. Обозначим его A . Для его определения перейдём к пределу в рекуррентном соотношении $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$, имеем $A = \sqrt{2 + A}$, откуда $A = 2$. Итак, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

2.7. Пусть $a_n = (-1)^n$. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Решение

Так как $a_{2k} = 1$, $a_{2k+1} = -1$, то $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$, отсюда следует, что данная последовательность предела не имеет. Члены её удовлетворяют рекуррентному соотношению $a_n = -a_{n-1}$. Если формально перейти к пределу в этом соотношении, то получим $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1}$, откуда $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Этот пример показывает, что возможность перехода в рекуррентном соотношении к пределу должна быть обоснована, т.е. существование предела должно быть установлено заранее.

2.8. Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2 + k^2}$.

Решение

$$\text{Имеем } \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2 + k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$

Осуществляя предельный переход, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

2.9. Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{n^2 - k^2}$.

Решение

Аналогично задаче 2.8 искомый предел равен

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{n^2 - k^2} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

2.10. Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (n+k)}$.

Решение

Обозначим $y_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (n+k)}$.

Очевидно, что

$$\ln \frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (n+k)} = \ln \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

есть интегральная сумма для

$$\int_0^2 \ln x dx = (x \ln x - x) \Big|_0^2 = 2 \ln 2 - 1.$$

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = e^{2 \ln 2 - 1} = \frac{4}{e}.$

2.11. Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots 1}_n}{10^n}.$

Решение

Очевидно, что

$$\begin{aligned} 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots 1}_n &= n + 10(n-1) + 10^2(n-2) + \dots + 10^n = \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{10^{n+1} - 10}{9} - n \right). \end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots 1}_n}{10^n} = \frac{10}{81}.$$

2.12. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^x - 1}{(2x)^x - 1}.$

Решение

Используем правило Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln 2x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0. \text{ Тогда}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^x - 1}{(2x)^x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln x} - 1}{e^{x \ln 2x} - 1} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln x}{x \ln 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln 2 + \ln x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.\end{aligned}$$

2.13. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x}{\sin \pi x}$.

Решение

Используя правило Лопиталя, имеем:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{\sin \pi x} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(e^{x \ln x} - 1)'}{(\sin \pi x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x (\ln x + 1)}{\pi \cos \pi x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = \frac{1 \cdot 0 + 1}{\pi \cos \pi} = -\frac{1}{\pi}.\end{aligned}$$

2.14. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^6} \int_1^{x^2} \sqrt{1+t^4} dt$.

Решение

Сделав замену $x^2 = y, y \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$, получим:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^6} \int_1^{x^2} \sqrt{1+t^4} dt = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y^3} \int_1^y \sqrt{1+t^4} dt.$$

Рассмотрим функцию $F(y) = \int_1^y \sqrt{1+t^4} dt$. Так как $\lim_{y \rightarrow \infty} F(y) = \infty$

и $\lim_{y \rightarrow \infty} y^3 = \infty$, то имеем неопределенность.

Можем воспользоваться правилом Лопиталя:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{F(y)}{y^3} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{F'(y)}{(y^3)'}.$$

В результате получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^6} \int_1^{x^2} \sqrt{1+t^4} dt = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y^3} \int_1^y \sqrt{1+t^4} dt = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{F'(y)}{(y^3)'} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+y^4}}{3y^2} = \frac{1}{3}.$$

Можно поступить и следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^6} \int_1^{x^2} \sqrt{1+t^4} dt = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(F(x^2) - F(1))'}{(x^6)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+(x^2)^4} \cdot 2x}{6x^5} = \frac{1}{3}.$$

Здесь использованы формула производной сложной функции $(f(u))'_x = f'(u) \cdot u'_x$ и правило Лопиталя.

2.15. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi n!)$.

Решение

Так как $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi n!) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \left(2\pi n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \right).$$

Выражение $n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ представим в виде суммы целой части

$n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \dots + \frac{n!}{n!}$ и $n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$. В силу периодичности синуса

получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi n!) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \left(2\pi n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \right) = \left| 2\pi n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \rightarrow 0 \right| =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(2\pi n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \right) = 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} + n \cdot n! \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{k!} \right) = 2\pi.$$

2.16. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} \right)^{(2013)}$.

Решение

$$\begin{aligned} \text{Так как } \cos 2x &= 1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^k 2^{2k} x^{2k}}{(2k)!} + \dots, \quad \text{то} \\ \frac{\sin^2 x}{x^2} &= \frac{1 - \cos 2x}{2x^2} = \frac{1}{2x^2} \left(1 - 1 + \frac{2^2 x^2}{2!} - \frac{2^4 x^4}{4!} + \dots - \frac{(-1)^k 2^{2k} x^{2k}}{(2k)!} + \dots \right) = \\ &= -\frac{1}{2x^2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} x^{2k}}{(2k)!} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k-1} x^{2k-2}}{(2k)!}. \end{aligned}$$

Вычислим производную $2k+1$ -ого порядка

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} \right)^{(2k+1)} &= -\frac{2^{2k+3} (2k+2)!}{1!(2k+4)!} x + \frac{2^{2k+4} (2k+3)!}{2!(2k+5)!} x^2 + \dots = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{2^{2k+i+2} x^i}{(2k+i+2)(2k+i+3)i!}. \end{aligned}$$

Видно, что любая нечетная производная $\frac{\sin^2 x}{x^2}$ при $x=0$ принимает нулевое значение.

$$\text{Ответ: } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} \right)^{(2013)} = 0.$$

2.17. Дана матрица $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{n} & \frac{6}{n} \\ \frac{3}{n} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{n} & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^n$.

Решение

Представим $A_n = E + B_n$, где E – единичная матрица,

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{n} & \frac{6}{n} \\ \frac{3}{n} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{n} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_n^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{n^2} & \frac{18}{n^2} \\ 0 & -\frac{2}{n^2} & -\frac{6}{n^2} \end{pmatrix}. \text{ Тогда } B_n^3 = 0.$$

По формуле бинома получаем

$$A_n^n = (E + B_n)^n = E + nB_n + \frac{n(n-1)}{2} B_n^2.$$

Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nB_n = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{2} B_n^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \text{ значит,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 9 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.18. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Решение

Обозначим $a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, тогда

$$\begin{aligned} \ln a_n &= \frac{1}{n} \ln n! - \frac{1}{n} n \ln n = \frac{1}{n} (\ln 1 - \ln n + \ln 2 - \ln n + \dots + \ln n - \ln n) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{k}{n}. \end{aligned}$$

Получилась интегральная сумма функции $\ln x$ на отрезке $[0;1]$.

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \int_0^1 \ln x dx = (x \ln x - x) \Big|_0^1 = -1$.

Тогда $\ln \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{e}$.

2.19. Доказать, что последовательность $\frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, \dots$ имеет

предел, и найти этот предел.

Решение

Если предел A существует, то он удовлетворяет отношению $A = 1 + 1/A$, откуда $A = 1 + \sqrt{2}$. Обозначим n -й член рассматриваемой последовательности $1 + \sqrt{2} + \delta_n$. Тогда

$$\delta_{n+1} = \frac{\delta_n (1 - \sqrt{2})}{1 + \sqrt{2} + \delta_n}$$

и при $|\delta_n| < 1$ имеем

$$|\delta_{n+1}| \leq |\delta_n| \left| \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right| \leq \frac{1}{2} |\delta_n|.$$

Но $\delta_1 = 1 - \sqrt{2}$, $|\delta_1| < 1/2$, так что $|\delta_n| \leq 1/2^n$ и $|\delta_n| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, откуда и вытекает, что предел действительно существует и равен $1 + \sqrt{2}$.

2.20. Рассмотрим отрезок AB . Последовательность точек $\{M_n\}$ строится следующим образом: $M_1 = A$, $M_2 = B$, каждая точка M_{n+1} является серединой отрезка, соединяющего точки

M_{n-1} и M_n . К какой точке отрезка AB стремится последовательность $\{M_n\}$?

Решение

Индукцией по n легко проверить, что точка M_n отстоит от точки $M_1 = A$ на $\frac{2}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right)$ длины отрезка AB (обозначим ее l). Таким образом, $\{M_n\}$ стремится к точке C отрезка AB , отстоящей от $M_1 = A$ на $\frac{2}{3} l$.

2.21. Последовательность $\{x_n\}$ определяется следующим образом: $x_1 \in [0, 1]$; если $n \geq 2$, то $x_n = \frac{1}{2} x_{n-1}$ при четном n и $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + 1)$ при нечетном n . Сколько предельных точек может быть у этой последовательности?

Решение

Имеем $\left| x_{2n} - \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{2} \left| x_{2n-1} - \frac{2}{3} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{x_{2n-2} + 1}{2} - \frac{2}{3} \right| = \frac{1}{4} \left| x_{2n-2} - \frac{1}{3} \right|$, так что $\{x_{2n}\} \rightarrow 1/3$ и $\{x_{2n-1}\} \rightarrow 2/3$, т.е. данная последовательность имеет две предельные точки: $1/3$ и $2/3$.

2.22. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \dots \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} \right]$.

Решение

Имеем

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^n \frac{k^3-1}{k^3+1} &= \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)}{3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n+1)} \prod_{k=2}^n \frac{(k^2+k+1)}{(k^2-k+1)} = \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \prod_{k=2}^n \frac{(k^2+k+1)}{(k^2-k+1)}. \end{aligned}$$

Но $(k+1)^2 - (k-1) + 1 = k^2 + k + 1$, так что, сокращая одинаковые множители в числителе и знаменателе, последнее произведение преобразуем к виду

$$\frac{2}{n(n+1)} \frac{n^2+n+1}{2^2-2+1} = \frac{2}{3(n^2+n)} \rightarrow \frac{2}{3}.$$

2.23. Числовая последовательность задана соотношением $u_1 = b$, $u_{n+1} = u_n^2 + (1-2a)u_n + a^2$. При каких значениях a и b последовательность $\{u_n\}$ сходится? Чему равен предел?

Решение

Имеем $u_{n+1} = u_n + (u_n - a)^2$, откуда $u_{n+1} \geq u_n$. Если предел A существует, то $A = A + (A - a)^2$ и $A = a$. Поэтому как только для некоторого i будет выполняться соотношение $u_i \geq a$, то все u_j при $j > i$ тоже больше a и предел не существует. Квадратный трехчлен $u_n^2 + (1-2a)u_n + a^2$ не превосходит a при $a-1 \leq u_n \leq a$, получаем, что $u_{n+1} \geq u_n \geq a-1$ и $u_n = u_n + (u_n - a)^2 \leq u_n + (a - u_n) = a$. Поэтому при $a-1 \leq b \leq a$ последовательность ограничена сверху и имеет пределом число a .

2.24. Доказать, что предел последовательности

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a} \quad x_0 > 0, \quad a > 0$$

существует, и найти его.

Решение

Если предел A существует, то $A = \frac{A(A^2 + 3a)}{3A^2 + a}$, откуда $A = \sqrt{a}$. Пусть $x_0^2 < a$, и уже доказано, что $x_n^2 < a$, тогда $\frac{x_n^2 + 3a}{3x_n^2 + a} > 1$, т.е. $x_{n+1} > x_n$.

Имеем

$$x_{n+1}^2 = x_n^2 \left[\frac{x_n^2 + 3a}{3x_n^2 + a} \right]^2 = \varphi(x_n^2), \text{ где } \varphi(z) = z \left[\frac{z + 3a}{3z + a} \right]^2.$$

Но $\varphi'(z) = 3 \frac{z + 3a}{3z + a} \left[\frac{z - a}{3z + a} \right]^2 > 0$ при $z \neq a$, $a > z > 0$, так что $r_{n+1}^2 = \varphi(x_n^2) < \varphi(a) = a$.

Таким образом, при $x_0^2 < a$ последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает и сходится к $A = \sqrt{a}$. Аналогично устанавливается, что при $x_0^2 > a$ последовательность монотонно убывает и сходится к тому же пределу. При $x_0^2 = a$ существование предела очевидно.

2.25. Пусть $a_1 = 1$, $a_k = k(a_{k-1} + 1)$.

Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{a_k} \right)$.

Решение

Легко заметить, что $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{a_k}\right) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{a_k + 1}{n!}\right)$. Индукцией по n :
 $a_n = n + n(n-1) + \dots + n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 + n!$, так что искомый предел равен

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = e.$$

2.26. Пусть последовательность $\{a_n\}$ такая, что $1/2 < a_n < 1$ при $n \geq 0$. Определим последовательность $\{x_n\}$ как

$$x_0 = a_0, \quad x_{n+1} = \frac{a_{n+1} + x_0}{1 + a_{n+1}x_n}.$$

Какие возможные значения могут быть для $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$?

Решение

Первый способ

Докажем по индукции, что $0 < 1 - x_n < \frac{1}{2^{n+1}}$.

При $n = 0$ справедливо, так как $\frac{1}{2} < x_0 = a_0 < 1$.

Пусть неравенство верно для n , тогда из рекуррентного соотношения получаем

$$1 - x_{n+1} = 1 - \frac{a_{n+1} + x_n}{1 + a_{n+1}x_n} = \frac{1 - a_{n+1}}{1 + a_{n+1}x_n} (1 - x_n).$$

Так как

$$0 < \frac{1 - a_{n+1}}{1 + a_{n+1}x_n} < \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + 0} = \frac{1}{2},$$

получаем

$$0 < 1 - x_{n+1} < \frac{1}{2}(1 - x_n) < \frac{1}{2} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}.$$

Откуда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

Второй способ

Как известно, $\operatorname{th}(u+v) = \frac{\operatorname{th} u + \operatorname{th} v}{1 + \operatorname{th} u \operatorname{th} v}$. Пусть $u_n = \operatorname{arth} a_n$, тогда

$$x_n = \operatorname{th}(u_0 + u_1 + \dots + u_n). \quad \text{Далее} \quad u_0 + u_1 + \dots + u_n > (n+1) \operatorname{arth} \frac{1}{2},$$

тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{u \rightarrow \infty} \operatorname{th} u = 1$.

ГЛАВА 3. ПРОИЗВОДНЫЕ

При решении задач по дифференциальному исчислению часто приходится обращаться к основным теоремам о дифференцируемых функциях.

Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ имеет конечную производную внутри этого отрезка и $f(a) = f(b)$, то существует хотя бы одно $c \in (a, b)$ такое, что $f'(c) = 0$.

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ имеет конечную производную внутри этого отрезка, и $f(a) \neq f(b)$, то существует хотя бы одно $c \in (a, b)$ такое, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Теорема Коши. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[a, b]$ имеют конечные производные внутри этого отрезка и $f'(x) + g'(x) \neq 0$, $g(a) \neq g(b)$, то существует хотя одно $c \in (a, b)$ такое, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Задачи

3.1. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дважды дифференцируемая функция и $f(0) = 0$. Доказать, что существует $\xi \in (-\pi/2, \pi/2)$ такая, что

$$f''(\xi) = f(\xi)(1 + 2 \operatorname{tg}^2 \xi)^4.$$

Решение

Обозначим $g(x) = f(x)\cos x$. Так как

$$g(-\pi/2) = g(0) = g(\pi/2) = 0,$$

то, по теореме Ролля, существуют $\xi_1 \in (-\pi/2, 0)$ и $\xi_2 \in (0, \pi/2)$ такие, что

$$g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0.$$

Теперь рассмотрим функцию

$$h(x) = \frac{g'(x)}{\cos^2 x} = \frac{f'(x)\cos x - f(x)\sin x}{\cos^2 x}.$$

Имеем: $h(\xi_1) = h(\xi_2) = 0$, по теореме Ролля существует $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$, для которой

$$\begin{aligned} 0 = h'(\xi) &= \frac{g''(\xi)\cos^2 \xi + 2\cos \xi \sin \xi g'(\xi)}{\cos^4 \xi} = \\ &= \frac{(f''(\xi)\cos \xi - 2f'(\xi)\sin \xi - f(\xi)\cos \xi)\cos \xi}{\cos^3 \xi} + \\ &+ \frac{2\sin \xi f'(\xi)\cos \xi - f(\xi)\sin \xi}{\cos^3 \xi} = \\ &= \frac{f''(\xi)\cos^2 \xi - f(\xi)(\cos^2 \xi + 2\sin^2 \xi)}{\cos^3 \xi} = \frac{f''(\xi) - f(\xi)(1 + 2\operatorname{tg}^2 \xi)}{\cos \xi}. \end{aligned}$$

Откуда следует, что $f''(\xi) = f(\xi)(1 + 2\operatorname{tg}^2 \xi)$.

Откуда следует, что $f''(\xi) = f(\xi)(1 + 2\operatorname{tg}^2 \xi)$.

3.2. Пусть $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $f'g - fg' \neq 0$. Доказать, что между двумя корнями уравнения $g = 0$ лежит ровно один корень уравнения $f = 0$ и наоборот.

Решение

Пусть $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ и $g(x) \neq 0$ для всех $x \in (\alpha, \beta)$, следовательно, функция $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна на (α, β) и $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$ и по теореме Ролля существует $\xi \in (\alpha, \beta)$ такая, что

$$\varphi'(\xi) = \frac{f'(\xi)g(x) - f(\xi)g'(x)}{g^2(\xi)} = 0.$$

Противоречие.

3.3. Пусть $f(x)$ – дифференцируемая на отрезке $[0, 1]$ функция. Докажите, что уравнение

$$(x - x^3) f'(x) = (3x^2 - 1) f(x)$$

имеет хотя бы один корень.

Решение

Рассмотрим функцию $F(x) = (x - x^3) f(x)$. Эта функция дифференцируема на отрезке $[0, 1]$, причём:

$$F'(x) = (x - x^3) f'(x) - (3x^2 - 1) f(x),$$

$$F(0) = F(1) = 0.$$

Значит, функция $F(x)$ на отрезке $[0, 1]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля, т.е. существует такая точка $x_0 \in (0, 1)$, в которой $F'(x_0) = 0$, то есть

$$(x_0 - x_0^3) f(x_0) - (3x_0^2 - 1) f(x_0) = 0,$$

Для любой дифференцируемой на отрезке $[0,1]$ функции $f(x)$. Что и требовалось доказать.

3.4. Доказать, что если

$$\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{2} + a_n = 0,$$

то уравнение $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ имеет, по крайней мере, один корень на интервале $(0,1)$.

Решение

Пусть

$$f(x) = \frac{a_0 x^{n+1}}{n+1} + \frac{a_1 x^n}{n} + \dots + \frac{a_{n-1} x^2}{2} + a_n x,$$

Тогда $f(0) = f(1) = 0$. Следовательно, по теореме Ролля, существует $\xi \in (0,1)$ такая, что

$$f'(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

3.5. Доказать, что у многочлена Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ (x^2 - 1)^n \right\}$$

все корни вещественные и принадлежат интервалу $(-1,1)$.

Решение

Уравнение $g(x) = (x^2 - 1)^n = 0$ имеет корни ± 1 кратностью n . Тогда уравнение $g'(x) = \left[(x^2 - 1)^n \right]' = 0$, по теореме Ролля, имеет корень $\xi \in (-1,1)$ и корни ± 1 кратностью $(n-1)$.

Уравнение $g''(x) = \left[(x^2 - 1)^n \right]'' = 0$ имеет корни $\xi_1 \in (-1, \xi)$ и $\xi_2 \in (\xi, 1)$ и корни ± 1 кратностью $(n-2)$ и т.д.

Тогда уравнение $g^{(n)}(x) = \left[(x^2 - 1)^n \right]^{(n)} = 0$ имеет n корней на $(-1, 1)$. Но это полином степени n , следовательно, это все его корни.

3.6. Вычислить производную функции $f(x)$ в точке $x=0$, где
$$f(x) = \frac{2x-1}{(x+2)(x+2^2)(x+2^3)\dots(x+2^{2004})}.$$

Решение

Рассмотрим функцию

$$g(x) = (x+2)(x+2^2)(x+2^3)\dots(x+2^{2004}),$$

$$g(0) = 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^{2004} = 2^{1+2+\dots+2004} = 2^{2009010}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x+2)'(x+2^2)(x+2^3)\dots(x+2^{2004}) + \\ &+ (x+2)(x+2^2)'(x+2^3)\dots(x+2^{2004}) + \\ &+ (x+2)(x+2^2)(x+2^3)' \cdot \dots \cdot (x+2^{2004}) + \\ &+ (x+2)(x+2^2)(x+2^3) \cdot \dots \cdot (x+2^{2004})' = \\ &= (x+2^2)(x+2^3) \cdot \dots \cdot (x+2^{2004}) + (x+2)(x+2^3) \times \dots \times \\ &\times (x+2^{2004}) + (x+2)(x+2^2)(x+2^4) \times \dots \times \end{aligned}$$

$$\times (x + 2^{2004}) + \dots + (x + 2) \times (x + 2^2) \times (x + 2^3) \times \dots \times \\ \times (x + 2^{2003}).$$

Теперь:

$$\begin{aligned} g'(0) &= 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^{2004} + 2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^{2004} + \\ &+ 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^{2004} + \dots + 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^{2003} = \\ &= \frac{2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^{2004}}{2} + \frac{2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^{2004}}{2^2} + \\ &+ \frac{2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^{2004}}{2^3} + \dots + \frac{2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^{2004}}{2^{2003}} + \\ &+ \frac{2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^{2004}}{2^{2004}} = g(0) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2004}} \right) = \\ &= g(0) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2004}} \right) = g(0) (1 - 2^{-2004}). \end{aligned}$$

Теперь найдём

$$f'(x) : f'(x) = \frac{2 \cdot g(x) - (2x - 1)g'(x)}{g^2(x)}, \text{ значит,}$$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{2 \cdot g(0) + g'(0)}{g^2(0)} = \\ &= \frac{2 \cdot g(0) + g(0)(1 - 2^{-2004})}{g^2(0)} = \\ &= \frac{2 + 1 - 2^{-2004}}{g(0)} = \frac{3 - 2^{-2004}}{2^{1002} \cdot 2^{2005}}. \end{aligned}$$

3.7. Дана функция

$$f(x) = \left(2 - x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x\right)^{-1}.$$

Вычислить $f^{(2005)}(1)$.

Решение

$$f(x) = (2 - x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x)^{-1} = \frac{1}{1 - (x-1)^5}.$$

Рассмотрим сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots + t^n + \dots, |t| < 1. \quad (*)$$

Разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в точке $x=1$ [по степеням $(x-1)$], положив в равенстве $(*) t = (x-1)^5$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - (x-1)^5} &= 1 + (x-1)^5 + (x-1)^{10} + \dots + (x-1)^{2000} + \\ &+ (x-1)^{2005} + \dots, \left| (x-1)^5 \right| < 1. \end{aligned}$$

Заметим, что $f'(1) = f''(1) = f^{(3)}(1) = f^{(4)}(1) = 0$, а $f^{(5)}(1) = 5!$, $f^{(10)}(1) = 10!$.

Аналогично $f^{(2005)}(1) = 2005!$, поскольку производные всех слагаемых степени ниже 2005 будут равны нулю при дифференцировании, а производные всех слагаемых степени выше 2005 будут равны нулю при подстановке $x=1$.

Ответ: $f^{(2005)}(1) = 2005!$.

3.8. Доказать, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, а также $f(a) = 0, g(b) = 1, f(x) > 0, g(x) > 0, x \in (a, b)$, то уравнение
$$\frac{f'(x)}{f(x)} \ln g(x) + \frac{g'(x)}{g(x)} = 0$$
 имеет, по крайней мере, один корень на интервале (a, b) .

Решение

Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) \ln g(x)$ и применим теорему Ролля:

$$F'(x) = f'(x) \ln g(x) + f(x) \frac{g'(x)}{g(x)} = 0.$$

Разделим обе части $f'(x)$ и будем иметь

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \ln g(x) + \frac{g'(x)}{g(x)} = 0, x \in (a, b).$$

3.9. Существует ли непрерывно-дифференцируемая функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям: $|f'(x)| < 2$ и $f(x) \cdot f'(x) \geq \sin x$ при всех действительных значениях x ?

Решение

Неравенство из условия задачи переписывается в виде

$$f(x) \cdot f'(x) - \sin x \geq 0$$

или $\left(f^2(x) + 2\cos x\right)' \geq 0$. Интегрируя от 0 до точки $x_0 > 0$, получаем

$$f^2(x_0) + 2\cos x_0 \geq f^2(0) + 2\cos 0.$$

Подставляя $x_0 = \pi$, получаем

$$f^2(\pi) - f^2(0) \geq 4,$$

откуда следует, что

$$|f(\pi)| \geq 2.$$

Ответ: не существует.

3.10. Составить уравнение нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0 :

$$y = \frac{4x - x^2}{4}, x_0 = 2.$$

Решение

Найдём y' :

$$y' = \left(\frac{4x - x^2}{4}\right)' = \frac{2 - x}{2}.$$

Тогда

$$y'_0 = y'(x_0) = 0.$$

Поскольку $y'(x_0) = 0$, то уравнение нормали имеет вид $x = x_0$.

То есть уравнение нормали: $x = 2$.

3.11. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на $[x_1, x_2]$, причем $0 < x_1 < x_2$. Доказать, что

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \left| \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{pmatrix} \right| = \xi f'(\xi) - f(\xi),$$

$$\xi \in (x_1, x_2).$$

Решение

Преобразуем правую часть равенства, применяя теорему Коши:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_2 - x_1} (x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)) &= \frac{\frac{f(x_2)}{x_2} - \frac{f(x_1)}{x_1}}{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}} = \\ &= \frac{\left(\frac{f(x)}{x} \right)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} \bigg|_{x=\xi} = \frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2} \xi^2 = \\ &= \xi f'(\xi) - f(\xi). \end{aligned}$$

3.12. Существует ли непрерывно дифференцируемая функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию

$$|f(x)| < 2, f(x) f'(x) \geq \sin x, \forall x \in \mathbb{R}?$$

Решение

Имеем

$$f^2(x) - f^2(0) = \int_0^x 2f(t) f'(t) dt \geq 2 \int_0^x \sin t dt = 2(1 - \cos x),$$

следовательно, $f^2(\pi) \geq 4$.

Ответ: не существует.

3.13. Пусть $f_1, \dots, f_n$ - линейно независимая система непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, 1]$ функций.

Доказать, что среди производных $f_1', \dots, f_n'$ найдутся $n-1$ линейно независимых функций.

Решение

Пусть $f_1', \dots, f_n'$ линейно зависимы (в противном случае всё ясно) и, например, $c_1 f_1' + \dots + c_{n-1} f_{n-1}' = f_n'$. Тогда $c_1 f_1 + \dots + c_{n-1} f_{n-1} + c = f_n$, где $c \neq 0$ в силу линейной независимости системы $\{f_k\}_{k=1}^n$. Покажем, что функции $\{f_k'\}_{k=1}^{n-1}$ линейно независимы.

Если

$$a_1 f_1' + \dots + a_{n-1} f_{n-1}' = 0, \text{ то } a_1 f_1 + \dots + c_{n-1} f_{n-1} + A = 0,$$

где $A = \text{const}$.

$$\text{Отсюда } (Ac_1 - ca_1)f_1 + \dots + (Ac_{n-1} - ca_{n-1})f_{n-1} = Af_n.$$

Следовательно, $A = 0$, а тогда и $a_k = 0$ при $1 \leq k \leq n-1$.

3.14. Пусть $P(x)$ – многочлен степени n с вещественными коэффициентами, имеющий только вещественные корни. Доказать, что

$$(n-1) \cdot (P'(x))^2 \geq n \cdot P(x) \cdot P''(x)$$

Для любого $x \in \mathbb{R}$.

Решение

Достаточно доказать неравенство $n > 1$ при $x \neq x_i$, где $x_1, \dots, x_n$ – корни многочлена $P(x)$.

Имеем

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x - x_i},$$

$$\frac{P''(x)}{P(x)} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{2}{(x - x_i)(x - x_j)}.$$

Следовательно,

$$(n-1) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x - x_i} \right)^2 - n \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{2}{(x - x_i)(x - x_j)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \frac{n-1}{(x-x_i)^2} - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{2}{(x-x_i)(x-x_j)} = \\
&= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{1}{(x-x_i)} - \frac{1}{(x-x_j)} \right)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

3.15. Дана дифференцируемая функция $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Известно, что $x \sin f(x) + x^2 = f(x) \sin x + 2f(x)^2$ при любом $x \in [0, 1]$. Найти $|f'(0)|$.

Решение

Пусть $a = f'(0)$. Тогда

$$f(x) = ax + o(x), \quad x \rightarrow +0,$$

откуда

$$\begin{aligned}
x(ax + o(x)) + x^2 &= (ax + o(x))(x + o(x)) = \\
&= 2(ax + o(x))^2,
\end{aligned}$$

$$\text{или } x^2(2a^2 - 1) = o(x^2), \text{ т.е. } a^2 = \frac{1}{2}, |a| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3.16. Пусть $f \in C^2([0, 1])$. Доказать, что функцию f можно представить в виде разности двух выпуклых вниз функций.

Решение

Пусть $h_2(x) = \max\{f''(x), 0\}$, $g_2(x) = \max\{-f''(x), 0\}$.

Пусть $h_1(x) = \int_0^x \left(\int_0^t h_2(\tau) d\tau \right) dt$, $g(x) = \int_0^x \left(\int_0^t g_2(\tau) d\tau \right) dt$.

Так как $f''(x) = h_2(x) - g_2(x)$, то найдутся числа a, b такие, что $f'(x) = h_1(x) - g(x) + ax + b$. Тогда $f(x) = h(x) - g(x)$, где $h(x) = h_1(x) + ax + b$, выпуклость h и g следует из неотрицательности их вторых производных.

Библиографический список

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
2. Беркович Ф.Д., Федий В.С., Шлыков В.И. Задачи студенческих математических олимпиад с указаниями и решениями. – Ростов н/Д.: Феникс, 2008.
3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 2001.
4. Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. Линейная алгебра в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2005.
5. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
6. Веретенников Б.М., Мохрачева Л.П., Соболев А.Б., Хомак Г.Л. Студенческие олимпиады по математике УГТУ-УПИ. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2009.
7. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 2000.
8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
9. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. – М.: Наука, 1971.
10. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997.
11. Дюбуа А.Б. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – Рязань: Рязанский филиал МЭСИ, 2007.
12. Зорич В.А. Математический анализ. – М.: МЦНМО, 2012.
13. Ильин В.А., Куркина А.В. Высшая математика. – М.: Изд. МГУ, 2005.
14. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. – М.: Высшая школа, 1981.
15. Попов Ю.И. Задачи повышенной трудности в курсе высшей математики. – СПб.: СПбГУ ИТМО, 2008.
16. Ройтенберг В.Ш., Оленикова Ю.К., Сидорова Л.А. Задачи студенческих олимпиад ЯГТУ. – Ярославль: Типография ЯГТУ, 2012.

17. Садовничий В.А., Подколзин А.С. Задачи студенческих олимпиад по математике. – М.: Наука, 1978.
18. Тер-Криков А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009.
19. Федорчук В.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Изд. НЦ ЭНАС, 2003.
20. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
21. Чехлов В.И. Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М.: МФТИ, 2005.
22. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Лань, 2009.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
ГЛАВА 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ.....	5
ГЛАВА 2. ПРЕДЕЛЫ.....	91
ГЛАВА 3. ПРОИЗВОДНЫЕ.....	111
Библиографический список.....	125

А м б а р ц у м я н Вазген Арсенович
А н д р ю щ е н к о Екатерина Андреевна
Б у х е н с к и й Кирилл Валентинович
Д в о р е ц к о в а Екатерина Александровна
Д ю б у а Александр Борисович
З и л о т о в а Мария Александровна
М а ш н и н а Светлана Николаевна
С а ф о ш к и н Алексей Сергеевич

Студенческие математические олимпиады. Часть 1

Редактор Р.К. Мангутова
Корректор С.В. Макушина
Подписано в печать 25.04.14. Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага газетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 8,0.
Тираж 50 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ.