МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ОРССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.И. СЮСЮКАЛОВ
Е.А.СЮСЮКАЛОВА

ИЗБРАННЫЕ НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Часть 1

Учебное пособие

Рязань 2012

Предисловие.

Настоящее пособие рекомендуется учащимся старших классов, студентам 1 и 2 курсов, готовящимся к участию в олимпиадах , а также преподавателям классов физико-математического профиля.

В обширном массиве олимпиадных задач трудно ориентироваться даже подготовленным учащимся и квалифицированным учителям. Стремление решать трудные нестандартные задачи без предварительного изучения базовых идей, методов, классов олимпиадных задач, не всегда приводит к желаемому результату. За отдельными задачами и фактами учащийся должен увидеть фундаментальные математические понятия и конструкции общематематических идей.

В пособии изложены циклы задач по избранным разделам олимпиадной математики. В каждом параграфе содержатся краткие сведения об основных понятиях, теоремах, приведены методы решения задач, примеры . В завершении раздела представлены задачи для самостоятельного изучения, к которым даны ответы, указания и решения.

Раздел «Логические задачи» является базисным. В нем изложены элементы математической логики. Хотя многие из предлагаемых задач можно решить непосредственно с помощью перебора, схем, знакомство с элементами алгебры логики имеет важное общеобразовательное значение и в других дисциплинах (информатика, физика). В настоящее время, в учебные планы многих специальностей в вузах включены курсы «Дискретная математика», «Математическая логика», которые предполагают определенную логическую культуру учащихся и навыки обращения с логическими переменными.

Параграфы «Принцип Дирихле», «Инварианты и полуинварианты» посвящены традиционной олимпиадной тематике.

При решении экстремальных задач школьного курса математики обычно используются методы, основанные на применении производной. Это подход, как правило , неприменим в задачах на максимум - минимум, предлагаемых на олимпиадах. В разделе пособия «Экстремальные задачи» представлены различные методы, которые используются при решении нестандартных задач данного типа .

В настоящее время в группе С ЕГЭ предлагаются задачи, требующие применения нестандартных идей, подходов к решению уравнений, неравенств, которые недостаточно изучаются в общеобразовательной школе. В разделе «Нестандартные уравнения и неравенства» изложены различные методы решений, основанные на таких свойствах функций, как ограниченность, монотонность, симметрия и другие.

Учащиеся, успешно освоившие изложенные в пособии идеи , методы , могут активно и системно приступать к решению задач из известных сборников [1 - 4].

Пособие отражает опыт проведения занятий с учащимися – призерами олимпиад , а также освещает содержание курса лекций, который был прочитан учителям математики Рязанской области в РИРО.

Авторы выражают благодарность всем слушателям за полезные обсуждения задач пособия.

Содержание

§1. Логические задачи

1.1. Определения. Примеры.

Логические задачи решаются различными способами: перебором вариантов; применением алгебры логики . Решению логических задач, в которых рассматриваются два или более конечных множеств, между которыми надо установить взаимно однозначное соответствие, часто помогает использование всевозможных таблиц и схем.

Пример 1. Беседуют трое: Белов, Чернов и Рыжов. Брюнет сказал Белову: «Любопытно, что один из нас русый, другой – брюнет, а третий – рыжий, но ни у кого цвет волос не соответствует фамилии». Какой цвет волос имеет каждый из беседующих?

Решение. Для решения задачи воспользуемся таблицей 3×3. По условию задачи Белов не русый, Чернов не черный, и Рыжов не рыжий. Это позволяет поставить знак « - » в соответствующих клетках. Кроме того, по условию, Белов – не брюнет, и, значит, в клетке на пересечении строки «Белов» и столбца «Черный» также надо поставить знак « - ».

Цвет волос / Фамилия	Рыжий	Черный	Русый
Белов		-	-
Чернов		-	
Рыжов	-		

Из таблицы следует, что Белов может быть только рыжим. Поставим знак плюс в соответствующей клетке. Отсюда видно, что Чернов не рыжий. Обозначим это знаком минус в таблице. Теперь ясно, что Чернов может быть только русым, а Рыжов – брюнетом.

Цвет волос / Фамилия	Рыжий	Черный	Русый
Белов	+	-	-
Чернов	-	-	+
Рыжов	-	+	-

Решим данную задачу графически. Изобразим два множества (множество фамилий и множество цветов волос). Пунктирными линиями соединим пары: Чернов – черные, Белов – русые, Рыжов – рыжие и Белов – черные.

Тогда, рассуждая аналогично табличному способу решения, мы соединим сплошными линиями сначала: Белов – рыжие, затем Чернов – русые, и наконец, Рыжов - черные.

Класс логических задач очень обширен. Кроме таблиц и схем, при решении задач, можно также использовать свойства и законы логических операций над высказываниями.

Высказывание – утверждение, которое может быть истинно или ложно.

Из высказываний при помощи логических связок, которым в обычной речи соответствуют частица «не», союзы «и», «или», оборот «если…, то…» и так далее, образуются новые составные высказывания. Если истинному высказыванию поставить в соответствие 1, а ложному 0, то логические связки можно формально определить с помощью *таблиц истинности*.

1. ***Отрицание*** (читают «не A», обозначают $\bar{A}$). Когда A истинно, тогда $\bar{A}$ ложно, и наоборот.
2. ***Конъюнкция*** или ***логическое умножение*** двух высказываний (читают «A и B», обозначают $A \cdot B$ или $A \wedge B$). Конъюнкция истинна только в случае, когда оба высказывания истинны.
3. ***Дизъюнкция*** или ***логическое сложение*** двух

высказываний (читают «A или B», обозначают $A + B$ или $A \vee B$). Дизъюнкция истинна в том случае, когда истинно хотя бы одно из двух высказываний.

4. ***Импликация*** (читают «если A, то B», обозначают $A \to B$). Высказывание A называют условием, а высказывание B – следствием. Импликация ложна только в том случае, когда условие истинно, а следствие ложно.

5. ***Эквиваленция*** или ***двойная импликация*** (читают «A эквивалентно B», обозначают $A \leftrightarrow B$). Эквиваленция истинна в том случае, когда или оба высказывания истинны, или оба высказывания ложны.

Если из A следует B и из B следует A, то высказывания A и B называют ***равносильными*** ($A = B$).

Приведем некоторые свойства логики высказываний:

переместительное свойство сложения

$$A + B = B + A\,, \qquad (1)$$

переместительное свойство умножения

$$A \cdot B = B \cdot A\,, \qquad (2)$$

сочетательные свойства сложения и умножения

$$A + (B + C) = (A + B) + C, \qquad (3)$$

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C, \qquad (4)$$

распределительные свойства

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C, \qquad (5)$$

$$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C), \qquad (6)$$

свойства операции отрицания

$$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}, \qquad (7)$$

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}, \qquad (8)$$

$$\bar{\bar{A}} = A, \qquad (9)$$

$$A \to B = \bar{A} + B. \qquad (10)$$

$$\bar{0} = 1,\ \bar{1} = 0 \qquad (11)$$

законы полного поглощения

$$AB + A = A,\ (A + B)A = A \qquad (12)$$

законы сокращения

$$A + \bar{A}B = A + B,\ A(\bar{A} + B) = AB \qquad (13)$$

Рассмотренные выше свойства могут быть доказаны с помощью таблиц истинности.

Пример 2. Доказать формулу
$A \to B = \bar{B} \to \bar{A}$.

Решение. Применяя формулы (10), (9), (1), получаем

$$\bar{B} \to \bar{A} = \bar{\bar{B}} + \bar{A} = B + \bar{A} = \bar{A} + B = A \to B.$$

Пример 3. Дана система неравенств $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \leq b, \\ c < d + 1, \end{cases} \\ a > b. \end{array}\right.$ сложности 3 (число неравенств в системе определяет ее сложность). Упростить систему.

Решение. Обозначим неравенства переменными $A, B, \bar{A}$: $a \leq b \quad A$; $c < d + 1 \quad B$; $a > b \quad \bar{A}$.

Составим логическое выражение соответствующее данной системе неравенств $A \cdot B + \bar{A}$, упростим его, используя свойство сокращения (13) $A \cdot B + \bar{A} = B + \bar{A}$, что соответствует новой эквивалентной системе неравенств сложности 2: $\left[\begin{array}{l} c < d + 1, \\ a > b \end{array}\right.$.

Пример 4. На вопрос, кто из трех учащихся изучал логику, был получен правильный ответ: если изучал первый, то изучал и второй, но неверно, что если изучал третий, то изучал и второй. Кто из учащихся изучал логику?

Решение. Рассмотрим высказывания:

A_1 - первый учащийся изучал логику,
A_2 - второй учащийся изучал логику,
A_3 - третий учащийся изучал логику.

1 *способ.* Из условия задачи следует истинность высказывания

$$P = (A_1 \to A_2)(\overline{A_3 \to A_2}).$$

Упростим полученное высказывание. Воспользуемся дважды формулой (10). Получим

$$P = (\overline{A_1} + A_2)(\overline{\overline{A_3} + A_2}).$$

Затем последовательно применим формулы (7),(9) и (5)

$$P = (\overline{A_1} + A_2)\overline{\overline{A_3}}\,\overline{A_2} = (\overline{A_1} + A_2)A_3\overline{A_2} = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,A_3 + A_2\overline{A_2}\,A_3.$$

Но высказывание $A_2\overline{A_2}$ очевидно ложно, а, следовательно, ложно и высказывание $A_2\overline{A_2}A_3$. Поэтому из истинности высказывания вытекает истинность высказывания $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,A_3$, а это означает, что логику изучал третий учащийся, а первый и второй не изучали.

2 *способ*. Условие $A_1 \to A_2$ исключает $\overline{A_1 \to A_2} = \overline{\overline{A_1} \vee A_2} = A_1 \cdot \overline{A_2}$, то есть $A_1 \cdot \overline{A_2} = 0$.

Условие $\overline{A_3 \to A_2}$ исключает $\overline{\overline{A_3 \to A_2}} = \overline{A_3} + A_2$ и тогда $\overline{A_3} + A_2 = 0$. Следовательно, $A_3 = 1$ и $A_2 = 0$. Тогда из восьми возможных вариантов подходит единственный $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 = 1$.

Пример 5. Брауну, Джонсу и Смиту предъявлено обвинение в соучастии в ограблении банка. Похитители скрылись на поджидавшем их автомобиле. На следствии Браун показал, что преступники были на синем «Бьюике»; Джонс сказал, что это был черный «Крайслер», а Смит утверждал, что это был «Форд Мустанг» и ни в коем случае не синий. Стало известно, что желая запутать следствие, каждый из них указал правильно либо марку машины, либо ее цвет. Какого цвета был автомобиль и какой марки?

Решение. Рассмотрим высказывания:

A – машина синего цвета,
B – машина марки «Бьюик»,
C – машина черного цвета,
D – машина марки «Крайслер»,
E – машина марки «Форд Мустанг».

Так как либо цвет машины, либо марка каждым из соучастников преступления названы верно, то из показаний Брауна следует, что высказывание $A + B$ истинно. Из слов Джонса вытекает истинность высказывания $C + D$. Утверждение Смита означает, что истинно высказывание $\bar{A} + E$.

Так как высказывания $A + B$, $C + D$, $\bar{A} + E$ истинны, то истинно и их произведение

$$P = (A + B)(C + D)(\bar{A} + E).$$

Раскрывая скобки, получим

$$P = (AC + AD + BC + BD)(\bar{A} + E) =$$
$$= AC\bar{A} + ACE + AD\bar{A} + ADE + BC\bar{A} + BCE + BD\bar{A} + BDE.$$

Из условия задачи следует, что все слагаемые, кроме пятого, являются ложными высказываниями. Сумма полученных восьми слагаемых может быть истинным высказыванием только при условии, что пятое слагаемое истинно, т.е. истинно высказывание $BC\bar{A}$, а это означает, что преступники скрылись на черном «Бьюике».

Пример 6. Если Элен не должна выполнить поручение, его выполняет Ванда. Утверждения «Элен должна» и «Камилла не может» не могут быть истинными одновременно. Если Ванда выполняет поручение, то Элен должна, а Камилла может выполнить его. Верно ли заключение: «Камилла всегда может выполнить поручение»?

Решение. Обозначим через A, B и C высказывания «Элен должна», «Ванда выполняет», «Камилла всегда может выполнить поручение», а через $\bar{A}, \bar{B}$ и $\bar{C}$ – их отрицания (например, $\bar{A}$ - «Элен не должна выполнить поручение»).

Ясно, что всего вариантов 8 ($ABC, \bar{A}BC, A\bar{B}C,$ и так далее). Из первого условия следует, что комбинация $\bar{A}$ и $\bar{B}$ недопустима, поэтому отбрасываем варианты $\bar{A}\bar{B}C$ и $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$. Из второго условия следует, что $A\bar{C}$ недопустима, значит, отбрасываются варианты $A\bar{B}\bar{C}$ и $AB\bar{C}$. Третье условие исключает $\bar{A}B$ и $B\bar{C}$, что отбрасывает вариант $\bar{A}B\bar{C}$. Итак, остаются варианты ABC и $A\bar{B}C$. В обоих вариантах Камилла может, Элен должна. Значит, заключение правильно.

1.2. Задачи для самостоятельного решения.

1. Упростить систему неравенств (сложность системы 7)

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{r} x+2y \le 0, \\ y > 1, \\ x > 2, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x+2y \le 0, \\ \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{r} x+2y > 0, \\ x > 2, \end{array}\right. \\ \quad y \le 1. \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

2. Староста, лидер, профорг хотят использовать электрическую схему, регистрирующую результаты тайного голосования большинством голосов среди них. Как она должна выглядеть?

3. Вернувшись домой, Мэгре позвонил на набережную Орфевр.

- Говорит Мэгре. Есть новости?
- Да, шеф. Поступили сообщения от инспекторов. Торранс установил, что если Франсуа был пьян, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет. Жуссье считает, что или Этьен убийца, или Франсуа не был пьян и убийство произошло после полуночи. Инспектор Люка просил передать Вам, что если убийство произошло после полуночи, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет. Затем звонила…
- Все. Спасибо. Этого достаточно. – Комиссар положил трубку. Он знал, что трезвый Франсуа никогда не лжет. Теперь он знал все».

4. Виктор, Роман, Юрий и Сергей заняли на математической олимпиаде первые четыре места. Когда их спросили о распределении мест, они дали три таких ответа:

1) Сергей – первый, Роман – второй;
2) Сергей – второй, Виктор – третий;
3) Юрий – второй, Виктор – четвертый.

Как распределились места, если в каждом ответе только одно утверждение истинно?

5. На склад, имеющий два помещения для хранения больших обьемов двух видов топлива – угля и торфа, каждого отдельно, поступают грузовики, каждый всякий раз с одним из этих видов топлива. К механизму, открывающему шахты, предъявляется требование, чтобы он открыл шахту в помещение для угля, если прибывает грузовик с этим топливом, и шахту в помещение для торфа, если прибывает грузовик с торфом. Для обеспечения хорошей сортировки топлива было предъявлено дополнительное требование: всякий раз в помещение склада впускается только один грузовик и открывается лишь одна шахта.

Спрашивается, имеет ли этот механизм также следующее свойство: если не въехал в помещение склада грузовик с углем, то шахта для угля не откроется, а если не въехал грузовик с торфом, то не откроется шахта для торфа.

6. На предприятии есть три цеха: $1, 2, 3$, договорившиеся о порядке утверждения проектов, а именно.

1.Если цех 2 не участвует в утверждении проекта, то в этом утверждении не участвует и цех 1.

2.Если цех 2 принимает участие в утверждении проекта, то в нем принимают участие цеха 1 и 3.

Спрашивается, обязан ли при этих условиях цех 3 принимать участие в утверждении проекта, когда в нем принимает участие цех 1.

7. Согласно договоренности, порядок утверждения нового проекта, в разработке которого участвуют учреждения N, M, K таков: если в утверждении принимают сначала участие учреждения N и M, то должно присоединиться к участию и учреждение K. Если утверждение происходит сначала в учреждениях M и K, присоединяется и учреждение N. Спрашивается, возможны ли такие случаи при утверждении проекта, когда принимали бы в нем участие только учреждения N и K, между тем как участие учреждения M не было бы необходимо (при сохранении договоренности о порядке утверждения проектов)?

8. На шашечной доске размером 4×4 произвольно расставлены шесть шашек. Доказать, что всегда можно указать два таких горизонтальных и два вертикальных ряда, что все шесть шашек стоят в этих рядах.

9. Доказать, что среди любых 6 человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое незнакомых друг с другом.

10. По обвинению в ограблении перед судом предстали A, B и C. Установлено следующее:

1) если A не виновен или B виновен, то C виновен;
2) если A не виновен, то C не виновен.

Виновен ли A ?

11. Определить, кто из четырех подозреваемых участвовал в ограблении, если известно:

1) если A участвовал, то и B участвовал;

2) если B участвовал, то или C участвовал, или A не участвовал;
3) если D не участвовал, то A участвовал, а C не участвовал;
4) если D участвовал, то A участвовал.

12. Экзамен сдавали три студента A, B и C. Известно, что:
1) если A не сдал или B сдал, то C сдал;
2) если A не сдал, то C не сдал.

Можно ли на основании этих данных установить, кто сдал экзамен?

13. Разбирается дело Брауна, Джонса и Смита. Один из них совершил преступление. На следствии каждый из них сделал два заявления.

Браун: «Я не делал этого. Смит сделал это.»
Джонс: «Смит невиновен. Браун сделал это.»
Смит: «Я не делал этого. Джонс не делал этого.»

Суд установил, что один из них дважды солгал, другой – дважды сказал правду, третий – один раз солгал, один раз сказал правду. Кто совершил преступление?

14. В доме живут A, его жена B и трое их детей C, D, E, при этом справедливы следующие утверждения:
1) Если A смотрит телевизор, то и B смотрит телевизор.
2) Хотя бы один из D и E смотрит телевизор.
3) Ровно один из B и C смотрит телевизор.
4) C и D либо оба смотрят, либо оба не смотрят телевизор.
5) Если E смотрит телевизор, то A и D тоже смотрят телевизор.

Кто смотрит и кто не смотрит телевизор?

В приведенных ниже задачах действие происходит на острове, где живут *рыцари* (*правдолюбцы*), которые всегда говорят правду и *лжецы*, которые всегда лгут.

15. Какой вопрос нужно задать встречному аборигену, чтобы понять лжец он или рыцарь?

16. Какой вопрос Вы задали бы островитянину, чтобы узнать, живет ли у него дома ручной крокодил?

17. Путешественник дважды задал рыцарю один и тот же вопрос и получил разные ответы. Приведите пример такого вопроса.

18. На какой вопрос любой абориген (житель острова) даст одинаковый ответ?

19. На острове живут два племени: аборигены и пришельцы. Аборигены всегда говорят правду, а пришельцы всегда лгут. Путешественник, приехавший на остров, нанял островитянина в проводника. Они пошли и увидели другого островитянина. Путешественник послал туземца узнать, к какому племени принадлежит этот туземец. Проводник вернулся и сказал: «Туземец говорит, что он абориген». Кем был проводник: пришельцем или аборигеном?

20. На острове О живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путешественник встретил двух туземцев – А и Б.

Туземец А произнес фразу:

- По крайней мере один из нас (А или Б) – лжец.

Можно ли сказать, кем является А и кем является Б (рыцарем или лжецом)?

21. Один логик попал к дикарям и был заключен в темницу, имеющую два выхода. Вождь дикарей предложил пленнику следующий шанс на спасение: «Один выход ведет на верную смерть, другой – на свободу. Ты можешь избрать любой. Сделать выбор тебе помогут два моих воина. Они останутся здесь, чтобы ответить на один твой вопрос – любой, какой ты пожелаешь им задать. Но я предупреждаю тебя, что один воин всегда говорит правду, а второй всегда лжет». И вождь ушел. Через некоторое время логик, задав вопрос одному из воинов, вышел на свободу. Какой вопрос он задал?

22. а)Турист шел к озеру. Он дошел до перекрестка, откуда вела одна дорога вправо, а другая – влево; одна шла к озеру, другая – нет. На перекрестке сидело двое парней, один из них всегда говорил правду, второй всегда лгал. Оба они отвечали на любой вопрос, либо «да», либо «нет». Все это было туристу известно, но он не знал, кто из них говорит правду, кто лжет. Он также не знал, какая из дорог ведет к озеру. Тогда он поставил обоим сразу один вопрос, каждый из них дал на него свой ответ.

Спрашивается, какой это был вопрос, раз турист по полученным ответам безошибочно решил, какая из дорог ведет к озеру?
б) Турист поставил лишь один вопрос одному из парней. Какой это был вопрос, раз он узнал по ответу, какая дорога ведет к озеру?
23. Жители города Правдина всегда говорят правду, жители Лгунова всегда лгут, а жители Переменска на один из двух заданных подряд вопросов отвечают правду, а на другой – ложь. Как путешественнику определить, где он и с кем разговаривает, задав 4 вопроса первому встречному? (На вопросы отвечают только «да» или «нет».)

1.3. Решения, указания, ответы.

1. Решение. Обозначим неравенства переменными:
$x+2y\le 0$ A, $y>1$ B, $x>2$ C, $x+2y>0$ $\bar{A}$, $y\le 1$ $\bar{B}$.
Составим логическое выражение соответствующее данной системе неравенств и упростим его

$$(A+B+C)(A+(\bar{A}+C)\cdot\bar{B})=(A+B+C)(A+\bar{A}\cdot\bar{B}+C\cdot\bar{B})$$
$$=(A+B+C)\big((A+\bar{A}\cdot\bar{B})+C\cdot\bar{B}\big)=$$
$$=(A+B+C)\big((A+\bar{B})+C\cdot\bar{B}\big)=(A+B+C)\big(A+(\bar{B}+C\cdot\bar{B})\big)=$$
$$=(A+B+C)(A+\bar{B})=A+(B+C)\cdot\bar{B}=$$
$$=A+B\cdot\bar{B}+C\cdot\bar{B}=A+C\cdot\bar{B}.$$

Получили выражение, которое соответствует новой эквивалентной совокупности неравенств сложности 3:

$$\left[\begin{array}{l} x+2y\le 0,\\ \begin{cases} x>2,\\ y\le 1.\end{cases}\end{array}\right.$$

2. Решение. Пусть P – высказывание «староста голосует за», Q – высказывание «лидер голосует за», R – высказывание «профорг голосует за». Составим таблицу истинности интересующего нас высказывания:

P	Q	R	Искомое высказывание	
1	1	1	1	$P\cdot Q\cdot R$
1	1	0	1	$P\cdot Q\cdot\bar{R}$
1	0	1	1	$P\cdot\bar{Q}\cdot R$

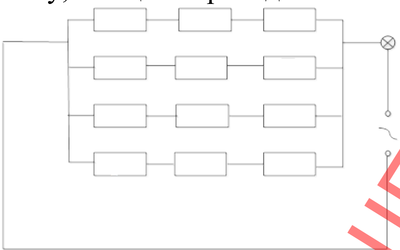
1	0	0	0	
0	1	1	1	$\bar{P}\cdot Q\cdot R$
0	1	0	0	
0	0	1	0	
0	0	0	0	

Единицы в последнем столбце поставлены в тех строках, где число единиц больше числа нулей.

Искомое высказывание имеет вид

$$(P\cdot Q\cdot R)+(P\cdot Q\cdot \bar{R})+(P\cdot \bar{Q}\cdot R)+(\bar{P}\cdot Q\cdot R).$$

Для его реализации в виде электрической цепи достаточно договориться, что истинность высказывания соответствует тому, что цепь проводит ток.



Лампочка загорится в том и только в том случае, если большинство проголосовало «за».

3. Указание. Рассмотрите следующие высказывания:

A – Франсуа был пьян,

B – Этьен убийца,

C – Франсуа лжет,

D – убийство произошло после полуночи.

Запишите, используя логические операции, высказывания инспекторов Торранса, Жуссье и Люка.

Решение. Инспекторы комиссара Мегрэ установили истинность высказываний: $A\to(B+C),\ B+\bar{A}\cdot D,\ D\to(B+C)$.

Произведение $P=\big(A\to(B+C)\big)\cdot(B+\bar{A}\cdot D)\cdot(D\to(B+C))$

Этих трех высказываний истинно. Освободимся от импликации, используя формулу (10). Получим

$$P=(\bar{A}+B+C)\cdot(B+\bar{A}\cdot D)\cdot(\bar{D}+B+C).$$

Упростим произведение первой и третьей строк, применив формулу (6): $P=(\bar{A}\cdot\bar{D}+B+C)\cdot(B+\bar{A}\cdot D)$.

Еще раз применяя эту формулу, получим

$P = B + (\bar{A} \cdot \bar{D} + C) \cdot \bar{A} \cdot D$ или $P = B + C \cdot \bar{A} \cdot D$.

Таким образом, из показаний инспекторов следовало лишь, что или Этьен – убийца, или одновременно имели место три обстоятельства: Франсуа лгал, Франсуа не был пьян, убийство произошло после полуночи. Но комиссару Мегрэ было известно, что трезвый Франсуа не лжет, т.е. что высказывание $C \cdot \bar{A} \cdot D$ ложно. Но тогда из истинности P вытекает истинность высказывания B. Итак, убийство совершил Этьен.

4.Решение. Если в каждом ответе одно из утверждений истинно, то и дизъюнкция этих утверждений истинна. Так, скажем, истинно высказывание: «или Сергей первый, или Роман – второй». Запишем это высказывание в следующем символическом виде: $С_1 + Р_2$. Аналогично, высказывания остальных ответов имеют вид $С_2 + В_3$ и $Ю_2 + В_4$ соответственно. Конъюнкция истинных высказываний – истинна. Следовательно, истинным будет высказывание

$(С_1 + Р_2) \cdot (С_2 + В_3) \cdot (Ю_2 + В_4)$.

Используя свойства (1)-(13), произведем упрощение данного высказывания. Для этого представим в виде дизъюнкции простейших конъюнкций первую конъюнкцию:

$$(С_1 + Р_2) \cdot (С_2 + В_3) = [(С_1 + Р_2) \cdot С_2] + [(С_1 + Р_2) \cdot В_3] =$$
$$= [(С_1 \cdot С_2) + (Р_2 \cdot С_2)] + [(С_1 \cdot В_3) + (Р_2 \cdot В_3)].$$

Высказывание, стоящее в первых квадратных скобках, ложно, так как является дизъюнкцией двух ложных высказываний $С_1 \cdot С_2$ и $Р_2 \cdot С_2$ - первое состоит в том, что Сергей занял одновременно 1 и 2 места, а второе – в том, что 2-е место одновременно заняли Роман и Сергей. Таким образом, первая конъюнкция приобретает вид

$$(С_1 + Р_2) \cdot (С_2 + В_3) = (С_1 \cdot В_3) + (Р_2 \cdot В_3).$$

Рассмотрим теперь оставшуюся конъюнкцию

$$[(С_1 \cdot В_3) + (Р_2 \cdot В_3)] \cdot (Ю_2 + В_4).$$

Используя свойства (1)-(13), имеем

$$([(С_1 \cdot В_3) + (Р_2 \cdot В_3)] \cdot Ю_2) + ([(С_1 \cdot В_3) + (Р_2 \cdot В_3)] \cdot В_4) =$$
$$= (С_1 \cdot В_3 \cdot Ю_2) + (Р_2 \cdot В_3 \cdot Ю_2) + (С_1 \cdot В_3 \cdot В_4) + (Р_2 \cdot В_3 \cdot В_4)$$
$$= (С_1 \cdot В_3 \cdot Ю_2).$$

Второе, третье и четвертое высказывания, участвующие в этой дизъюнкции, ложны, так как являются конъюнкциями или одинаковых букв с разными номерами, или разных букв с одинаковыми номерами, чего быть не может. Следовательно, истинной является конъюнкция $С_1 \cdot В_3 \cdot Ю_2$.
Значит, первое место занял Сергей, второе – Юрий, третье – Виктор и четвертое – Роман.

5. Решение. Рассмотрим высказывания:

A – грузовик с углем прибыл на склад,
B – грузовик с торфом прибыл на склад ,
P – шахта открыта для угля,
Q – шахта открыта для торфа.

Тогда условия можно записать так: $A \to P$, $B \to Q$ (1);
$(A \cdot \bar{B}) + (\bar{A} \cdot B)$ (2) (это условие выражает, что на складе находится не более одного грузовика);
$(P \cdot \bar{Q}) + (\bar{P} \cdot Q)$ (3) (это условие выражает, что всегда открыто не более одной шахты).
Свойства механизма, управляющего сортировкой, о которых поставлен вопрос, можно записать так: $\bar{A} \to \bar{P}$, $\bar{B} \to \bar{Q}$ (4)
Исследуем эти свойства. Импликации (4) нельзя прямо вывести из (1), так как по свойству $X \to Y = \bar{Y} \to \bar{X}$, следует $A \to P = \bar{P} \to \bar{A}$, а не нужная нам импликация $\bar{A} \to \bar{P}$.
Подставим в формулу $(X \leftrightarrow Y) = (X \cdot Y) + (\bar{X} \cdot \bar{Y})$ вместо Y его отрицание $\bar{Y}$, а затем A вместо X и B вместо Y. Тогда получим $(A \leftrightarrow \bar{B}) = \left[(A \cdot \bar{B}) + (\bar{A} \cdot \bar{\bar{B}})\right]$.
По формуле $\bar{\bar{X}} = X$, имеем $(A \leftrightarrow \bar{B}) = [(A \cdot \bar{B}) + (\bar{A} \cdot B)]$.
Отсюда, условие (2) можно выразить так: $A \leftrightarrow \bar{B}$. (5)
Аналогично можно (3) представить эквивалентностью
$P \leftrightarrow \bar{Q}$. (6) Подставляя из (5) и (6) в условие (1), получим, следовательно, $\bar{B} \to \bar{Q}$ (вторая импликация из (4)), то есть мы получили утвердительный ответ на вопрос; если грузовик с торфом не въехал в помещение склада, шахта для торфа не откроется. Точно так же получим первую импликацию формулы (4). Используя аналогичные рассуждения можно получить остальную часть ответа.

6. Цех 3 должен принимать участие в утверждении проекта, если в нем принимает участие цех 1. **Указание**. Обозначьте через A высказывание: «цех 1 принимает участие в утверждении проекта», через B – высказывание: «в утверждении участвует цех 2» и через C – высказывание: «в утверждении проекта принимает участие цех 3». Запишите условия договора в виде формулы, используя данные высказывания.

7. Если в процессе утверждения проекта примут участие учреждения N и K , то учреждение M может, но не обязательно, принять в нем участие. **Указание**. Обозначьте через A высказывание: «в утверждении участвует учреждение N», через B – высказывание: «в утверждении участвует учреждение M» и через C – высказывание: «в утверждении участвует учреждение K». Запишите условия договора в виде формулы и составьте для нее таблицу истинности.

8. **Указание**. Возможны случаи: а) в одном из рядов стоит не меньше трех шашек, б) есть два ряда, в каждом из которых по две шашки. Тогда в случае а) возьмем ряд с наибольшим числом шашек (три или более), а оставшиеся (2 или 3 шашки) заведомо лежат не более чем в 3-х рядах. В случае б) укажем два ряда, в каждом из которых по 2 шашки, а для оставшихся двух шашек – укажем для каждой из них свой ряд.

9. **Решение**. Пусть A – один из шести человек. Тогда среди остальных пяти найдутся либо трое с ним знакомых, либо – трое с ним незнакомых. Пусть, например, B, C, D знакомы с A. Если среди них найдутся двое знакомых друг с другом, то вместе с A они образуют тройку попарно знакомых. Если же все трое незнакомы друг с другом, то они дадут искомую тройку попарно незнакомых людей. Аналогично разбирается случай, когда B, C, D не знакомы с A.

10. Да**. 11**. Все участвовали. **12**. A сдал экзамен. **13**. Смит.

14.Телевизор смотрят C и D. **Решение.** Обозначим за A утверждение «A смотрит телевизор», за B – «B смотрит телевизор», и т.д., а за $\bar{A}, \bar{B}$, и т.д. – их отрицания. Тогда условие 1 отбрасывает $A\bar{B}$, 2 – $\bar{D}\bar{E}$, 3 – BC и $\bar{B}\bar{C}$, 4 – $\bar{C}D$ и $C\bar{D}$, 5 – $\bar{A}E$ и $D\bar{E}$. Подходит единственная комбинация $\bar{A}\bar{B}CD\bar{E}$. Итак, телевизор смотрят C и D.

15. Любой вопрос, на который известен правильный ответ.
16. Ответили бы утвердительно Вы на вопрос: «У Вас дома есть ручной крокодил?» **17**. Любой вопрос, ответ на который меняется со временем, например: «Который час?» **18**. «Кто вы – рыцарь или лжец?»
19. **Решение.** Так как ответ встреченного островитянина мог быть лишь «Я – абориген» (этот ответ является правдой для аборигенов и ложью для пришельцев), а проводник сказал, что туземец – абориген, то проводник является аборигеном.
20. **Решение**. Если А – лжец, то его утверждение неверно, т.е. оба должны быть рыцарями. Противоречие. Значит, А – рыцарь. Тогда его утверждение неверно и Б – лжец.
21. «Верно ли следующее высказывание: или ты говоришь правду и этот выход ведет на свободу, или ты лжешь и этот выход ведет на смерть?»
22. **а**) Показав на одну из дорог турист спросил: «Правда ли, что эта дорога ведет к озеру и что дважды два равно пяти?»
б) Турист спросил «Сказал бы второй парень, что эта дорога ведет к озеру?»
23. **Решение**: Путешественник может спросить:

1) Равен ли нуль нулю?
2) Равна ли единица единице?
3) Это город Правдин?
4) Это город Лгунов?

Первые два вопроса позволяют «опознать» собеседника и, если это житель города Переменска – узнать, правду или ложь ответит он на следующий вопрос.

Впрочем, скорее всего, прохожий после первых двух вопросов заподозрил бы вопрошающего в ненормальности и сбежал бы от него. Поэтому можно начать беседу с двух вопросов «Вы из Переменска?». Правдивец два раза ответит «нет», лгун – два раза ответит «да», а житель Переменска ответит по-разному.

Однако два одинаковых вопроса подряд могут вызвать подозрение, что путешественник глухой, а это может привести к ошибке, если спрошенный – житель Переменска (два вопроса могут быть восприняты как один). Поэтому лучше поступить следующим образом. Первый вопрос: «Вы житель Переменска?»

Если ответ «да», то спросить: «Вы житель Лгунова?» (В случае утвердительного ответа на второй вопрос прохожий из Переменска, а в случае отрицательного ответа – из Лгунова.) Если же ответ на первый вопрос «нет», то спросить: «Вы из Правдина?» (Здесь утвердительный ответ даст житель Правдина, а отрицательный – Переменска.)

§2. Принцип Дирихле

2.1. Определения. Примеры.

Принцип Дирихле выражает соотношение между двумя множествами. Существует несколько формулировок данного принципа.

Классическая формулировка этого принципа заключается в следующем: если в n клетках сидит $n+1$ кроликов, то найдется клетка, в которой сидит не менее двух кроликов.

Более общая форма: если в n клетках сидит не менее $nk+1$ кроликов, то найдется клетка, в которой сидит не менее $k+1$ кроликов.

Аналогом принципа Дирихле в геометрии являются следующие утверждения:

1) Если на отрезке длиной 1 расположено несколько отрезков, сумма длин которых больше 1, то, по крайней мере, два из них имеют общую точку.
2) Если на окружности радиуса 1 расположено несколько дуг, сумма длин которых больше, то, по крайней мере, две из них имеют общую точку.
3) Если внутри фигуры площадью 1 расположено несколько фигур, сумма площадей которых больше 1, то, по крайней мере, две из них имеют общую точку.

Пример 1. Дано 12 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать два, разность которых делится на 11.

Решение: Примем числа за «зайцев». Так как их 12, то «клеток» должно быть меньше. Пусть «клетки» - это остатки от деления целого числа на 11. Всего «клеток» будет 11:

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10. Тогда по принципу Дирихле найдется «клетка», в которой будут сидеть не менее чем 2 «зайца», то есть найдутся 2 целых числа с одним остатком. А разность 2 чисел с одинаковым остатком от деления на 11, будет делиться на 11: $\left(a_m - a_n = (11m + q) - (11n + q) = 11(m - n)\right)$.

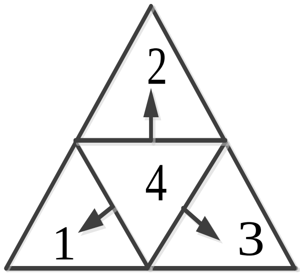
Пример 2. В магазин привезли 25 ящиков с тремя разными сортами яблок (в каждом ящике яблоки только одного сорта). Докажите, что среди них есть по крайней мере 9 ящиков с яблоками одного и того же сорта.

Решение: 25 ящиков распределим по 3 сортам. Так как 25=3×8+1, то применим «обобщенный принцип Дирихле» для n=3, k=8 и получим, что какого-то сорта не менее 9 ящиков.

Пример 3. Дано 8 различных натуральных чисел, не больших 15. Докажите, что среди их положительных попарных разностей есть три одинаковые.

Решение: Различных разностей может быть 14 – от 1 до 14 – это те 14 «клеток», в которые мы будем сажать «кроликов». Ими должны быть разности между парами данных нам натуральных чисел. Однако имеется 28 пар и их можно рассадить по 14 «клеткам» так, что в каждой «клетке» будет сидеть ровно два «кролика» (и значит, в каждой меньше трех). В «клетке» с номером 14 может сидеть не более одного кролика, ведь число 14 можно записать как разность двух натуральных чисел, не превосходящих 15, лишь одним способом: $14 = 15 - 1$. Значит, в оставшихся 13 «клетках» сидят не менее 27 «кроликов», и применение обобщенного принципа Дирихле дает нам желаемый результат.

Пример 4. Внутри равностороннего треугольника со стороной 1 см расположено 5 точек. Докажите, что расстояние между некоторыми двумя из них меньше 0,5 см.



Решение: Пусть 5 точек будут «зайцами». Так как «клеток» должно быть меньше, то их должно быть 4. Как получить эти 4 «клетки»? Так как в условии задачи есть еще 2 числа: 1 и 0,5; причем второе меньше первого в 2 раза, то можно получить 4 «клетки», разбив равносторонний треугольник с помощью проведения средних линий. Тогда получим 4 равносторонних треугольника со сторонами по 0,5 см, которые и будут «клетками».

Так как «зайцев» - 5, «клеток» - 4 и 5>4, то по принципу Дирихле найдется «клетка» - равносторонний треугольник со стороной 0,5 см, в которой попадут не менее 2 «зайцев» - точек. А так как все 4 треугольника равны и расстояние между точками в любом треугольнике будет меньше, чем 0,5 см, то мы доказали, что между некоторыми 2 точками из 5 расстояние будет меньше, чем 0,5 см.

Пример 5. В ковре размером 4×4 метра моль проела 15 дырок. Докажите, что из него можно вырезать коврик размером 1×1 метр, не содержащий внутри себя дырок.(Дырки можно считать точечными).

Решение: Разрежем ковер на 16 ковриков размерами 1×1 метр. Так как ковриков – «клеток» - 16, а дырок – «зайцев» - 15, то найдется хотя бы одна «клетка», в которой не «зайцев», то есть найдется коврик без дырок внутри.

Пример 6. В классе 27 учеников. Найдется ли месяц, в котором отмечают свои дни рождения не меньше, чем три ученика этого класса.

Решение: В году 12 месяцев. Обозначим их за «клетки», а учеников за «зайцев». Так как , то по обобщенному принципу

Дирихле найдется «клетка», в которой сидят не менее 3 «зайцев», то есть найдется месяц, в котором дни рождения празднуют не менее 3 учеников.

Пример 7. Доказать, что, если целые числа a и b взаимно просты, то найдется такое натуральное число k, для которого a^k-1 делится на b.

Решение: Рассмотрим числа $1, a, a^2, ..., a^k$ и выпишем их остатки при делении на b. Так как этих чисел $b+1$, а различных остатков при делении на b существует только b (а именно $0,1,...,b-1$), то среди этих чисел найдутся два числа, дающие одинаковые остатки при делении на b. Пусть эти числа a^{n_1} и a^{n_2} $(n_1<n_2)$. Тогда их разность $(a^{n_2-n_1}-1)a^{n}$ делится на b, а поскольку a и b взаимно просты, то и $a^{n_2-n_1}-1$ делится на b.

Пример 8. Внутри квадрата со стороной 1 помещена фигура, площадь которой больше 1/2. Докажите, что эта фигура содержит две точки, симметричные относительно центра квадрата.

Решение: Пусть F - данная фигура с площадью $S(F)$, F' - фигура, симметричная ей относительно центра квадрата. Тогда $S(F)+S(F')>1$ и существует точка $X\in F\cap F'$. Очевидно, что X и симметричная ей точка X' образуют искомую пару.

Пример 9. Докажите, что из любых n целых чисел можно выбрать несколько (возможно, одно), сумма которых делиться на n.

Решение: Пусть у нас есть числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Рассмотрим n сумм a_1, a_1+a_2, $a_1+a_2+a_3, \ldots,$ $a_1+a_2+\ldots+a_n$. Если одна из этих сумм делиться на n, то мы нашли требуемую сумму, в противном случае рассмотрим остатки данных сумм при делении на n. Эти остатки могут равняться $1, 2, \ldots, n-1$. По принципу Дирихле, найдутся две суммы, имеющие одинаковые остатки при делении на n. Пусть это суммы $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ и $a_1 + a_2 + \ldots + a_m$ $(k < m)$. Тогда их разность, равная $a_{k+1} + \ldots + a_m$ делиться на n.

2.2. Задачи для самостоятельного решения.

1.Докажите, что в любой компании из 5 человек есть двое, имеющие одинаковое число знакомых в этой компании.

2. 10 школьников на олимпиаде решили 35 задач, причем известно, что среди них есть школьники, решившие ровно одну задачу, школьники, решившие ровно две задачи и школьники, решившие ровно три задачи. Докажите, что есть школьник, решивший не менее пяти задач.

3. Докажите, что равносторонний треугольник нельзя покрыть двумя меньшими равносторонними треугольниками.

4. В квадрат со стороной 1 метр бросили 51 точку. Докажите, что какие-то три них можно накрыть квадратом со стороной 20 см.

5.Пятеро молодых рабочих получили на всех зарплату – 1500 рублей. Каждый из них хочет купить себе магнитофон ценой 320 рублей. Докажите, что кому-то их них придется подождать с покупкой до следующей зарплаты.

6. В бригаде 7 человек и их суммарный возраст – 332 года. Докажите, что из них можно выбрать трех человек, сумма возрастов которых не меньше 142 лет.

7. Докажите, что среди степеней двойки есть две, разность которых делится на 1987.

8. Докажите, что из 52 целых чисел всегда найдутся два, разность квадратов которых делится на 100.

9. Докажите, что среди чисел, записываемых только единицами, есть число, которое делится на 1987.

10. Докажите, что существует степень тройки, оканчивающаяся на 001.

11. Сто человек сидят за круглым столом, причем более половин из них – мужчины. Докажите, что какие-то два мужчины сидят друг напротив друга.

12. 15 мальчиков собрали 100 орехов. Докажите, что какие-то два из них собрали одинаковое число орехов.

13. Цифры 1, 2,…, 9 разбили на три группы. Докажите, что произведение чисел в одной из групп не меньше 72.

14. В клетках таблицы×**3** расставлены числа -1, 0, 1. Докажите, что какие-то две из 8 сумм по всем строкам, всем столбцам и двум главным диагоналям будут равны.

15. Докажите, что среди любых 10 целых чисел найдется несколько, сумма которых делиться на 10.

16. Докажите, что из 26 различных натуральных чисел, не превосходящих 50, всегда можно выбрать два числа, одно из которых делиться на другое.

17. Равносторонний треугольник A можно закрыть пятью равносторонними треугольниками одинакового размера(треугольники могут перекрываться и выступать за пределы треугольника A). Докажите, что треугольник A можно полностью закрыть и четырьмя такими треугольниками.

18. На сфере имеется пятно, площадь которого больше половины площади сферы. Докажите, что это пятно покрывает пару диаметрально противоположных точек сферы.

19. В квадрат со стороной 1 поместили несколько окружностей, сумма радиусов которых равна 0,51. Докажите, что существует прямая, параллельная одной из сторон квадрата и пересекающая не мене двух окружностей.

20. Докажите, что среди чисел, записываемых только единицами, найдется число, которое делиться на 1001.

21. На плоскости даны 5 точек с целыми координатами. Докажите, что середина одного из отрезков, соединяющих их, также имеет целые координаты.

22. В прямоугольнике $3{\times}4$ расположено шесть точек. Доказать, что среди них найдутся две, расстояние между которыми не превосходит $\sqrt{5}$.

23. На плоскости дано 25 точек, причем среди любых трех из них найдутся две на расстоянии меньше 1. Доказать, что существует круг радиуса 1, содержащий не меньше 13 из этих точек.

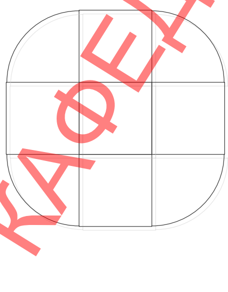
24. Доказать, что в круге радиуса 1 нельзя выбрать более пяти точек, попарные расстояния между которыми больше 1.

25. Дано 7 отрезков, длины которых заключены между 0,1 м. и 1 м. Докажите, что среди этих отрезков найдутся три таких, что из них можно составить треугольник.

26. На отрезке длиной 1 закрашено несколько отрезков, причем расстояние между любыми двумя точками закрашенных отрезков не равно 0,1. Докажите, что сумма длин закрашенных отрезков не превосходит 0,5.

27. Назовем крестом фигуру, образованную диагоналями квадрата со стороной 1. Докажите, что в круге радиуса 100 можно разместить лишь конечное число непересекающихся крестов.

28. В квадрате со стороной 15 находятся 20 попарно непересекающихся квадратиков со стороной 1. Докажите, что в большом квадрате можно поместить круг радиуса 1 так, чтобы он не пересекался ни с одним из квадратиков.



2.3. Решения, указания, ответы.

1.*Указание***:** Вариантов числа знакомых всего 5: от 0 до 4. Осталось заметить, что если у кого-то 4 знакомых, то ни у кого не может быть 0 знакомых.

2.*Указание***:** Из условий следует, что найдутся 7 школьников, решивших 35-6=29 задач. Так как $29 = 4 \cdot 7 + 1$, то найдется школьник, решивший не менее пяти задач.

3.*Указание***:** Каждый из меньших треугольников не может накрывать более одной вершины большого треугольника.

4.Решение: Разобьем наш квадрат на 25 квадратов со стороной 20 см. По обобщенному принципу Дирихле, в какой-то из них попадет, по крайней мере три точки из 51 брошенной.

5.*Указание***:** Если бы каждый из рабочих мог купить магнитофон, то у них в сумме было бы не менее $5 \cdot 320 = 1600$ рублей.

6.Решение: Рассмотрим все возможные тройки рабочих бригады. Сумма их суммарных возрастов, как легко подсчитать, равна 15×332, а всего таких троек 35. Значит, есть тройка, суммарный возраст в которой не меньше, чем $15\times332/35$, что больше 142.

7.*Указание***:** Рассмотрите 1988 степеней и их остатки по модулю 1987.

8.*Указание***:** Квадраты при делении на 100 могут давать лишь 51 остаток, так как остатки x и $100 - x$ при возведении в квадрат дают один и тот же остаток.

9.Решение: Рассмотрим 1988 чисел 1, 11, 111,…, 111…11 (1988 единиц) и распределим их по 1987 ячейкам с номерами 0, 1, 2, …, 1986 – каждое число попадет в ячейку с номером, равным остатку от деления этого числа на 1987. Тогда (по принципу Дирихле) найдутся два числа, которые имеют одинаковые остатки при делении на 1987. Пусть это числа 11…11 (m

единиц) и 11…11 (n единиц), причем $m > n$. Но их разность, которая делится на 1987, равна 11…1100…00 ($m-n$ единиц и n нулей). Сократим все нули – ведь они не имеют никакого отношения к делимости на 1987 – и получим число из одних единиц, которое делится на 1987.

10.*Указание***:** Если 3^m и 3^n – степени тройки, дающие один и тот же остаток при делении на 1000, то $3^m - 3^n = 3^n(3^{m-n} - 1)$ делится на 1000 (мы считаем для определенности, что $m > n$).

11.*Указание:* Разбейте всех людей на 50 пар так, чтобы в каждой паре было два человека, сидящих друг напротив друга. Ясно, что в одной из этих пар – «клеток» оба человека – мужчины.

12.Решение: Если это не так, то, очевидно, что мальчики собрали не менее, чем $0+1+2+...+14=105$ орехов – противоречие.

13.Решение: Произведение чисел во всех группах равно $9!=362880$, а $71^3=357911$.

14.Решение: Эти суммы могут принимать лишь 7 разных значений: от -3 до 3.

15.*Указание***:** Рассмотрите 10 сумм:

$x_1,\ x_1+x_2,\ldots,\ x_1+x_2+\ldots+x_{10}$ и их остатки при делении на 10.

16.Решение: Представим каждое из чисел в виде $2^k \cdot m$, где m – нечетное число. Так как наши числа не больше 50, то m может принимать значения 1, 3, 5, …,49 – всего 25 значений. Значит, по принципу Дирихле, какое-то значение будет приниматься по крайней мере дважды. Пусть оно равно $2t+1$. Но тогда большее из чисел вида $2^a \cdot (2t+1)$ делится на меньшее $2^b \cdot (2t+1)$.

17.Решение: Отметим шесть точек: вершины треугольника A и середины его сторон. Тогда один из треугольников закрывает по крайней мере две из отмеченных точек, то есть его сторона не меньше $a/2$, где $a-$ длина стороны треугольника A (в равностороннем треугольнике наибольшим расстоянием между двумя точками является расстояние между вершинами). Тогда каждый из четырех треугольников, на которые A разбивается средними линиями, закрывается одним из данных треугольников.

18.*Указание***:** Рассмотрите фигуру, симметричную данной относительно центра сферы. Далее повторите рассуждение примера 8.

19.Решение: Длина проекции любой окружности на любую прямую равна диаметру окружности. Следовательно, сумма длин проекций всех окружностей на любую сторону квадрата равна 1,02, т.е. превышает длину этой стороны. Тогда найдется точка X, принадлежащая проекциям хотя бы двух окружностей. Прямая, проходящая через X и перпендикулярная соответствующей стороне, - искомая.

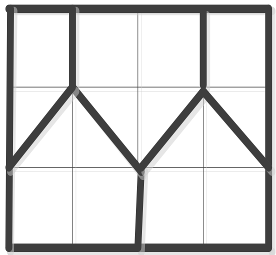
20.Решение: Предположим, что среди чисел, записываемых только единицами, нет чисел, которые делятся на 1001. Рассмотрим остатки при делении на 1001 чисел 1, 11, 111,…, $\underbrace{111\ldots111}_{1001}$. Если один из остатков равен 0, то искомое число найдено. Если ни один из остатков не равен 0, то эти остатки могут быть равны 1, 2, …, 1000 – всего 1000 вариантов. Так как чисел 1001, а остатков 1000, то у каких-то двух чисел остатки будут одинаковы. Пусть у чисел $\underbrace{111\ldots111}_{m}$ и $\underbrace{111\ldots111}_{n}$ ($m>n$) будут одинаковые остатки при делении на 1001. Тогда разность этих чисел, равная $\underbrace{111\ldots111}_{m}$ - $\underbrace{111\ldots111}_{n}=$

$=\underbrace{111\ldots111}_{m-n}\underbrace{000\ldots000}_{n}=\underbrace{111\ldots111}_{m-n}\cdot 10^n$, будет делиться на 1001.

Заметим, что $\text{НОД}(10^n;1001)=1$. Из этого, и из того, что

$\underbrace{111\ldots111}_{m-n}\cdot 10^n$ делиться на 1001, следует, что $\underbrace{111\ldots111}_{m-n}$ делиться на 1001.

21. *Указание*: Среди пяти точек найдутся три, абсциссы которых все либо четны, либо нечетны. (Если две четны и две нечетны, то всего точек не больше четырех.) Среди этих точек найдутся две с ординатами одинаковой четности.



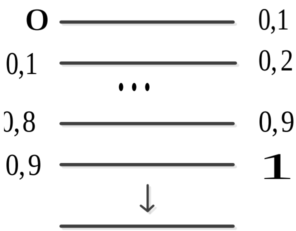
22.Решение: Разрежем прямоугольник на пять фигур, как показано на рисунке. По принципу Дирихле в одну из них попадут, по крайней мере, две точки, расстояние между любыми двумя точками каждой из этих фигур не превосходит $\sqrt{5}$.

23.Решение: Пусть A– одна из данных точек. Если все остальные точки лежат в круге S_1 радиуса 1 с центром A, то доказывать больше нечего. Пусть теперь B – данная точка, лежащая вне круга S_1, т.е. $AB > 1$. Рассмотрим круг S_2 радиуса 1 с центром B. Среди точек A, B и C, где C– любая из данных точек, найдутся две на расстоянии меньше 1, причем это не могут быть точки A и B. Поэтому круги S_1 и S_2, содержат все данные точки, т.е. один из них содержит не менее 13 точек.

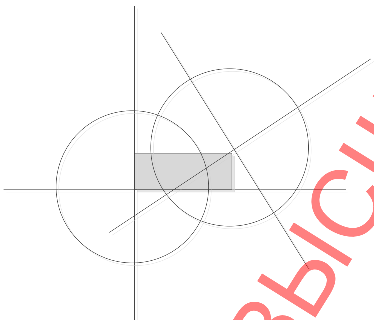
24.Решение: Разобьем круг на 6 равных секторов (с вершиной в центре круга). Тогда в каждый сектор попадет не более, чем по точке (ибо расстояние между любыми двумя точками одного сектора не больше 1). Если бы в каждый сектор попало бы по точке, то нашлись бы две точки, угол между радиус-векторами которых был не больше 60° и, следовательно, расстояние между ними не больше 1. Итак, можно выбрать не более, чем 5 точек.

25.Решение: Пусть составить нельзя, тогда есть 2 отрезка длиной не менее 0,1 м., 3-й отрезок длиной не менее 0,2 м., 4-й – не менее 0,3 м., 5-й – не менее 0,5 м., 6-й – не менее 0,8 м. и 7-й не менее 0,5+0,8=1,3 м. Противоречие.

26.Решение: Разрежем отрезок на 10 отрезков длиной 0,1 и,



сложив их стопочкой , спроецируем на такой же отрезок.
Так как расстояние между любыми двумя окрашенными точками не равно 0,1, то окрашенные точки соседних отрезков не могут проектироваться в одну точку. Поэтому ни в одну точку не могут проецироваться окрашенные точки более пяти отрезков. Значит, сумма длин проекций



окрашенных отрезков (равная сумме их длин) не превосходит $5 \cdot 0{,}1 = 0{,}5$.

27.Решение: Для каждого креста рассмотрим круг радиуса $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ с центром в центре креста. Докажем, что если пресекаются два таких круга, то пересекаются и сами кресты. Расстояние между центрами пересекающихся равных кругов не превосходит их удвоенного радиуса, поэтому расстояние между центрами соответствующих им крестов не превосходит $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
Рассмотрим прямоугольник, заданный перекладинами первого креста и центром второго. Одна из перекладин второго креста проходит через этот прямоугольник, поэтому она пересекает

первый крест, так как длина перекладины равна $\frac{1}{\sqrt{2}}$, а длина диагонали прямоугольника не превосходит $\frac{1}{\sqrt{2}}$. В круге конечного радиуса можно разместить лишь конечное число непересекающихся кругов радиуса $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

28.Решение: Рассмотрим фигуру, состоящую из всех точек, удаленных от квадратика со стороной 1 на расстояние не больше 1. Ясно, что круг радиуса 1, центр которого расположен вне этой фигуры, не пересекаются с квадратиком. Площадь такой фигуры равна $\pi+5$. Центр нужного круга должен также находиться на расстоянии больше 1 от сторон большого квадрата, то есть внутри квадрата со стороной 13. Ясно, что 20 фигур площадью $\pi+5$ не могут покрыть квадрат со стороной 13, так как $20(\pi+5)<13^2$. Круг с центром в непокрытой точке обладает требуемым свойством.

§3. Инварианты. Полуинварианты.

3.1. Инварианты.

Инвариантом некоторого преобразования называется величина или свойство, которое не изменяется при этом преобразовании. В качестве инварианта чаще всего рассматриваются четность (нечетность) и остаток от деления, хотя встречаются и другие стандартные инварианты: перестановки, раскраски и т.п. Применение четности – одна из наиболее часто встречающихся идей при решении олимпиадных задач.

Наиболее важные утверждения, на которых основано применение этой идеи:

1. Четность суммы нескольких целых чисел совпадает с четностью количества нечетных слагаемых;

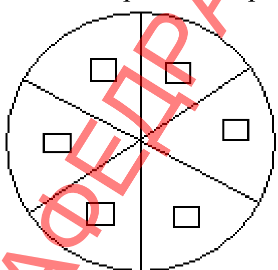
2. Знак произведения нескольких (отличных от нуля) чисел определяется четностью количества отрицательных сомножителей.

Пример 1. На столе стоят вверх дном 25 стаканов. За один ход Вася может перевернуть любые два стакана. Сможет ли Вася за несколько ходов поставить все стаканы правильно?

Решение: Покажем, что число стаканов, стоящих дном вверх, будет нечетно. Вначале их 25 – нечетное число. Пусть на каком-то шаге вверх дном стоит $2k+1$ стакан. Если Вася выберет два стакана, стоящих правильно, и перевернет их, то неправильно стоящих стаканов станет $2k+3$ – нечетное число. Если Вася выберет два стакана, стоящих неправильно, и перевернет их, то неправильно стоящих стаканов станет $2k-1$ – нечетное число. Если Вася выберет два стакана, один из которых стоит правильно, а другой неправильно, и перевернет их, то неправильно стоящих стаканов останется $2k+1$ – нечетное число. Если бы Вася смог поставить все стаканы правильно, то неправильно стоящих стаканов было бы 0 – четное число. А поскольку всегда на столе будет нечетное число стаканов, стоящих неправильно, то Вася не сможет поставить все стаканы правильно.

Ответ: Не может.

Пример 2. Круг разделен на 6 секторов (см. рис.), в каждом из которых стоит фишка. Разрешается за один ход сдвинуть любые две фишки в соседние с ними сектора. Можно ли с помощью таких операций собрать все фишки в одном секторе?



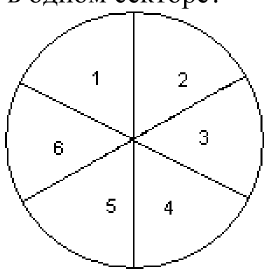
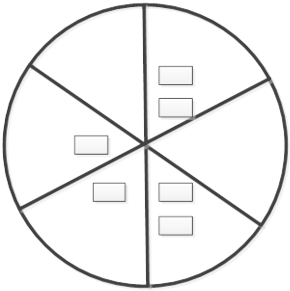


Рис.1 Рис.2

Решение: Занумеруем сектора по кругу числами от 1 до 6(см. рис.2) и для любой расстановки фишек рассмотрим следующую величину S – сумму номеров секторов, в которых стоят данные нам 6 фишек (с учетом кратности).



Например: для расположения на рисунке 3 имеем:

$S = 2+2+4+4+5+6 = 23$.

Очевидно, что при сдвиге фишки в соседний сектор соответствующее ей слагаемое в сумме S меняет четность. Значит, если сдвигаются

Рис. 3

одновременно две фишки, то четность величины S не меняется – она инвариантна. Но для расстановки на рисунке 1 $S = 21$. Если же все фишки находятся в одном секторе с номером A, то $S = 6 \cdot A$ – это четное число (а 21 – число нечетное). Следовательно, из исходной расстановки нельзя получить расстановку, в которой все 6 фишек находятся в одном секторе.

Пример 3. На доске написаны числа 1, 2, 3,…, 19, 20. Разрешается стереть любые два числа a и b и вместо них написать число $a+b-1$. Какое число может остаться на доске после 19 таких операций?

Решение: Для любого набора из n чисел на доске рассмотрим следующую величину X: сумму всех чисел, уменьшенную на n. Допустим, что с набором произведено описанное в условии преобразование. Выясним, как измениться эта величина? Если сумма всех чисел набора, кроме a и b, равна S, то до преобразования величина X равнялась $S+a+b-n$, а после преобразования $X = S+(a+b-1)-(n-1) = S+a+b-n$. Итак, значение величины X не изменилось, она – инвариант. Исходно (для набора из условия задачи) $X = (1+2+\ldots+19+20)-20 = 190$. Значит, и после 19 операций, когда на доске останется одно число p, X также будет равно 190. Но по своему определению, в этот момент X будет равно $p-1$. Значит, $p=191$. Следовательно, число, оставшееся на доске, обязательно будет равно 191.

Пример 4. В стране Серобуромалин живет 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Когда встречаются два хамелеона разного цвета, они одновременно приобретают окраску третьего цвета (например, серый и бурый становится малиновыми). Может ли через некоторое время оказаться, что все хамелеоны имеют один цвет?

Решение: Операция описанная в условии состоит в том, что «пропадают» два хамелеона двух разных цветов и «появляются» два хамелеона третьего цвета. Величину – инвариант определим по набору чисел (a,b,c), где a,b и c– количества серых, бурых и малиновых хамелеонов соответственно. По условию из набора (a,b,c) получается набор $(a-1,b-1,c+2)$ или набор $(a-1,b+2,c-1)$ или набор $(a+2,b-1,c-1)$ – все зависит от того, в какой цвет перекрашиваются хамелеоны. Разности между числами набора либо не меняются, либо изменяются на 3, а значит, остатки этих разностей при делении на 3 не меняются – они инвариантны. Но в начале $a-b=13-15=-2$, а в случае, если все хамелеоны малиновые, $a-b=0-0=0$. Числа 0 и -2 имеют разные остатки при делении на 3, что и доказывает невозможность такого положения дел в стране. Аналогично разбираются и случаи, когда все хамелеоны стали серыми, или все стали бурыми.

Пример 5. Фигура «верблюд» ходит по доске 10×10 ходом типа $(1,3)$ (то есть, есть она сдвигается сначала на соседнее поле, а затем сдвигается еще на три поля в перпендикулярном направлении; конь, например, ходит ходом типа $(1,2)$). Можно ли пройти ходом «верблюд» с какого- то исходного поля на соседнее с ним?

Решение: Рассмотрим шахматную раскраску доски в черный и белый цвет. Тогда, как легко проверить, каждым своим ходом

«верблюд» ходит с одного поля на поле того же цвета; иными словами, цвет поля, на котором стоит «верблюд» – инвариант. Но так как два соседних поля имеют разную окраску, то пройти с одного на другое ходом «верблюда» невозможно.
Ответ: нельзя.

3.2. Полуинварианты.

Полуинвариант – величина (функция), которая при каждом преобразовании (операции) возрастает (или убывает). Она используется при доказательстве остановки процессов.

Пример 6. Вокруг поляны стоят 12 домиков, покрашенные в белый и красный цвет, в которых поселилось 12 гномов. У каждого гнома нечетное число друзей. В январе первый гном красит свой дом в тот цвет, в который окрашены дома большинства его друзей. В феврале это же делает второй (по часовой стрелке) и т.д. Докажите, что наступит момент, после которого цвет дома у каждого гнома перестанет меняться.
Решение. Рассмотрим число пар гномов-друзей, у которых дома разного цвета. Каждый месяц это число не увеличивается. Действительно, если цвет дома сохраняется, то число не меняется, если же цвет дома меняется, то это число уменьшится. Так как это число неотрицательно, оно не может бесконечно уменьшаться, значит, с того момента, как оно перестает меняться, каждый гном будет красить свой дом в один и тот же цвет.

Пример 7. В квадрате 10×10 стоят 100 ненулевых чисел. Можно менять знак у чисел в любом столбце или строке. Докажите, что этими операциями можно добиться того, чтобы в каждой строке и в каждом столбце сумма чисел была бы неотрицательна.
Решение. Рассмотрим величину S: сумму всех чисел в таблице. Если в какой – то строке (или каком-то столбце) сумма чисел отрицательна, то поменяем знаки у чисел этой строки (столбца). При этом величина S увеличится. Так как расстановками знаков «плюс» и «минус» перед каждым из 100 чисел таблицы можно получить лишь конечное число значений величины S, то

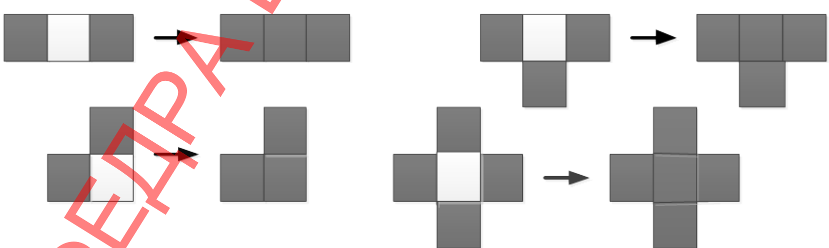
в какой-то момент величина S перестанет расти. Тогда мы получим требуемую таблицу.

Пример 8. В парламенте у каждого его члена не более трех врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в одной с ним палате будет не более одного врага.(Считается, что если X – враг Y, то Y – враг X.)

Решение. Разобьем сначала парламентариев по палатам произвольным образом. Если в какой-то палате у ее члена A не менее двух врагов, то в другой палате у A не более одного врага. Пересадим A в другую палату; при этом суммарное количество S пар врагов в той и другой палате уменьшится. Поскольку S – целое неотрицательное число, то такое уменьшение S может быть проделано лишь конечное число раз, и в результате получим требуемое разбиение на две палаты.

Пример 9. Квадратное поле разбито на сто одинаковых квадратных участков, девять из которых поросли бурьяном. Известно, что бурьян за год распространяется на те и только те участки, у которых не менее двух соседних (то есть имеющих общую сторону) участков уже поросли бурьяном. Докажите, что поле никогда не зарастет бурьяном полностью.

Решение. Рассмотрим суммарную длину границ участков, заросших бурьяном. Заметим, что при разрастании бурьяна эта суммарная длина границы не увеличивается.



А так изначально суммарная длина границ участков, заросших бурьяном, не больше $4 \cdot 9 = 36$, то поле не сможет целиком зарасти бурьяном, так как длина границы поля равна 40.

3.3. Задачи для самостоятельного решения.

1. На доске записано 15 чисел: 8 нулей и 7 единиц. Предлагается 14 раз подряд выполнить такую операцию: зачеркнуть любые два числа и если они одинаковые, то дописать к оставшимся числам нуль, а если разные, то единицу. Какое число останется на доске?

2. На доске написаны числа 1, 2, 3,…, 1989. Разрешается стереть любые два числа и написать вместо них разность этих чисел. Можно ли добиться того, чтобы все числа на доске были нулями?

3. На доске написаны числа 1, 2, 3,…, 19, 20. Разрешается стереть любые два числа a и b и заменить их на число $ab+a+b$. Какое число может остаться на доске после 19 таких операций?

4. Докажите, что шахматную доску 8×8 нельзя замостить 15 фигурками 1×4 и одной фигуркой, указанной на рисунке 4.

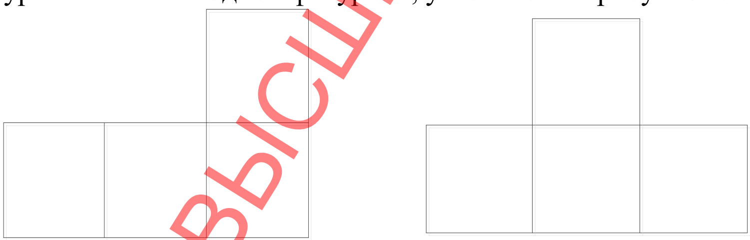


рис.4

5. Докажите, что шахматную доску 10×10 нельзя замостить фигурками, указанными на рисунке 5.

6. Докажите, что шахматную доску 102×102 нельзя замостить фигурками 1×4.

7. Дно прямоугольной коробки вымощено плитками 1×4 и 2×2. Плитки высыпали из коробки и одна плитка 2×2 потерялась. Ее заменили на плитку 1×4. Докажите, что теперь дно коробки вымостить не удастся.

8. Можно ли шашечную доску размером 10×10 замостить плитками размером 1×4?

9. Дана шахматная доска. Разрешается перекрашивать в другой цвет сразу все клетки какой-либо горизонтали или вертикали. Может ли при этом получиться доска, у которой ровно одна черная клетка?

10. Дана шахматная доска. Разрешается перекрашивать в другой цвет сразу все клетки, расположенные внутри квадрата размером 2×2. Может ли в конце концов на доске остаться ровно одна белая клетка?

11. В клетках квадратной таблицы 4×4 расставлены знаки «+» и «-».

Разрешается одновременно менять знак во всех клетках, расположенных в одной строке, в одном столбце или на прямой, параллельной какой-нибудь диагонали (в частности, в любой угловой клетке). Докажите, что сколько бы ни производили таких перемен знака, не удастся получить таблицу из одних плюсов.

+	-	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

12. Иван- царевич имеет два волшебных меча, один из которых может отрубить Змею Горынычу 21 голову, а второй – 4 головы, но тогда у Змея Горыныча отрастает 1985 голов. Может ли Иван отрубить Змею Горынычу все головы, если в самом начале у него было 100 голов? (Примечание: если, например, у Змея Горыныча осталось лишь три головы, то их ни тем, ни другим мечом нельзя).

13. На доске написано число 8^n. Из него вычисляется сумма цифр, у полученного числа вновь вычисляется сумма цифр, и так далее, до тех пор, пока не получится однозначное число. Что это за число, если $n = 1989$?

14. В таблице $m \times n$ расставлены числа так, что сумма чисел в любой строке или столбце равна 1. Докажите, что $m = n$.

15. На столе стоят 7 стаканов – все вверх дном. Разрешается за один ход перевернуть любые 4 стакана. Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы все стаканы стояли правильно?

16. В ряд выписаны числа $1, 2, 3, \ldots, n$. За один ход разрешается поменять местами любые два числа. Может ли после 2009 таких операций порядок чисел оказаться исходным?

17. Дана некоторая тройка чисел. С любыми двумя из них разрешается проделывать следующее: если эти числа равны a и b, то их можно заменить на $(a+b)/\sqrt{2}$ и $(a-b)/\sqrt{2}$. Можно ли с помощью таких операций получить тройку $(1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ из тройки $(2, \sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$?

18. Квадратный трехчлен $f(x)$ разрешается заменить на один из трехчленов $x^2 f(1+1/x)$ или $(x-1)^2 f(1/(x-1))$. Можно ли с помощью таких операций из квадратного трехчлена x^2+4x+3 получить трехчлен $x^2+10x+9$?

19. Написанное на доске четырехзначное число можно заменить на другое, прибавив к двум его соседним цифрам по единице, если ни одна из этих цифр не равна 9; либо, вычтя из соседних двух цифр по единице, если ни одна из них не равна 0. Можно ли с помощью таких операций из числа 1234 получить число 2002?

20. На доске написаны многочлены $P(x)=x^2+2$ и $Q(x)=x+1$. Разрешается записать на доску сумму, разность или произведение любых двух из уже выписанных на доску многочленов. Может ли на доске появиться многочлен $R(x)=x^3+2$?

21. На доске написаны числа 3, 4, 5, 6. Любую пару чисел можно заменить на пару чисел $a+b+\sqrt{a^2+b^2}$ и $a+b-\sqrt{a^2+b^2}$. Может ли на доске появиться число, меньше 1?

22. Две карты Москвы, одна с более мелким масштабом, наложены друг на друга так, что меньшая карта лежит целиком на большей. Докажите, что их можно проткнуть булавкой так, чтобы на обеих картах была проколота одна и та же точка Москвы.

23. На доске записано целое число. Его последняя цифра запоминается, затем стирается и, умноженная на 5, прибавляется к тому числу, что осталось на доске после стирания. Первоначально было записано число 7^{1998}. Может ли после применения нескольких таких операций получиться число 1998^7.

24. На каждой грани куба написано число, причем не все эти числа одинаковы. Каждое из написанных чисел заменяется средним арифметическим чисел, написанных на четырех соседних гранях. Могут ли через несколько таких операций на всех гранях оказаться исходные числа?

25. В стране несколько городов, попарные расстояния между которыми различны. Путешественник отправился из города A в самый удаленный от него город B, оттуда – в самый удаленный от него город C и так далее. Докажите, что если C не совпадает с A, то путешественник никогда не вернется в A.

26. На 6 гранях куба написаны 6 чисел, среди которых есть 0 и 1. Каждое из 6 чисел заменили средним арифметическим четырех чисел, стоящих на соседних гранях. С новыми числами повторили ту же операцию, и так 25 раз. В результате на каждой грани оказалось написанным то же самое число, что и в начале. Докажите, что в вычислениях была допущена ошибка.

27. Дан произвольный набор из n целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Из него получается новый набор: $(a_1+a_2)/2, (a_2+a_3)/2, \ldots, (a_{n-1}+a_n)/2, (a_n+a_1)/2$; из этого набора – следующий по тому же правилу и т.д. Докажите, что если все получающиеся числа целые, то все первоначальные числа равны.

28. По кругу выписано несколько чисел. Если для некоторых четырех идущих подряд чисел a, b, c, d оказывается, что $(a-d)(b-c)<0$, то числа b и c можно поменять местами. Докажите, что такую операцию можно проделать лишь конечное число раз.

29. Задано несколько красных и несколько синих точек. Некоторые из них соединены отрезками. Назовем точку «особой», если более половины из соединенных с ней точек имеют цвет, отличный от её цвета. Особые точки разрешается перекрашивать по следующему правилу: на каждом шагу выбирается любая особая точка и перекрашивается в другой цвет. Докажите, что через несколько шагов не останется ни одной особой точки.

30. На доске выписаны n чисел. Разрешается стереть любые два из них, скажем a и b, и вместо них записать одно число $(a+b)/4$. Эта операция повторяется $n-1$ раз, и в результате на доске остается одно число. Доказать, что если на доске было написано n единиц, то в результате всех операций на доске останется число, не меньше чем $1/n$.

31. На плоскости дано N точек. Некоторые точки соединены отрезками. Если два отрезка пересекаются, то их можно заменить двумя другими с концами в тех же точках. Может ли этот процесс продолжаться бесконечно?

32. В тридевятом царстве несколько городов, и некоторые из них соединены дорогами. Из каждого города выходит нечетное число дорог. В каждом городе есть ратуша, а на ратуше – флаг одного из двух цветов: синего и красного. Каждое утро в одном из городов происходит революция: жители поднимают на ратуше вместо старого флага тот, который поднят на большинстве ратуш тех городов, с которыми этот город соединен дорогами. Докажите, что рано или поздно революции прекратятся.

33. На бесконечном клетчатом листе белой бумаги несколько клеток покрашено в черный цвет. Раз в секунду происходит одновременное перекрашивание всех клеток листа по следующему правилу: каждая клетка K принимает тот цвет, который имело в предыдущий момент большинство из трех клеток: самой клетки K и ее соседей справа и сверху. Докажите, что через некоторое время на листве не останется черных клеток.

3.4. Решения, указания, ответы.

1. Решение: Сумма 15 исходных чисел равна 7. 7 – число нечетное. Рассмотрим, какая сумма чисел будет получаться после выполнения операции. Если вычеркнем 2 нуля, то после дописывания нуля на доске будет 7 нулей и 7 единиц. Сумма этих 14 чисел будет нечетная. Если вычеркнем 2 единицы, то на доске останется после дописывания нуля 9 нулей и 5 единиц. Сумма данных 14 чисел будет нечетной. Наконец, вычеркивая нуль и единицу и приписывая единицу, мы получим на доске 7 нулей и 7 единиц, сумма которых снова является нечетным числом. Таким образом, после выполнения данной операции получается на 1 число на доске меньше, причем сумма оставшихся чисел все время остается нечетной. Так как 1 – нечетное число, а 0 – четное, то на доске после выполнения 14 раз указанной операции получается нечетное число, то есть 1.

2. *Указание*: Проверьте, что четность суммы чисел на доске неизменна.

3. *Указание*:В качестве инварианта рассмотрите следующую величину: произведение всех чисел на доске, предварительно увеличенных на 1.

4. *Указание:* Используйте раскраску доски в два цвета одноцветными и чередующимися по цвету строками.

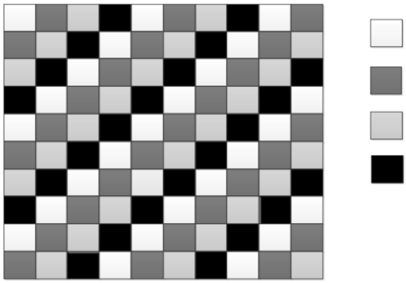
5. *Указание*: Используйте шахматную раскраску доски.

6. *Указание*: Используйте раскраску доски в четыре цвета одноцветными и чередующимися по цвету строками.

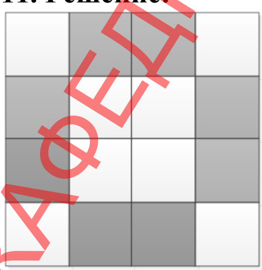
7. Решение: Рассмотрим раскраску в 4 цвета, указанную на рисунке 6. Тогда каждая плитка 2×2 содержит ровно одну клетку цвета 1, а каждая плитка 1×4 – ни одной или две клетки цвета 1. Следовательно, четность числа плиток 2×2 должна совпадать с четностью числа клеток

1	4	1	4	1
2	3	2	3	2
1	4	1	4	1
2	3	2	3	2
1	4	1	4	1

цвета 1, что и доказывает утверждение задачи.
8. Нет. **Решение**: Раскрасим доску в 4 цвета.
Легко сосчитать, что клеток второго цвета 26, а четвертого 24.



Каждая плитка 1×4 покрывает по одной клетке каждого цвета. Поэтому плитками 1×4 нельзя замостить доску 10×10, так как иначе клеток каждого цвета было бы поровну.
9. Нет. **Решение**: При перекрашивании горизонтали или вертикали, содержащей k черных и $8-k$ белых клеток, получится $8-k$ черных и k белых клеток. Поэтому число черных клеток измениться на $(8-k)-k=8-2k$, т.е. на четное число. Так как четность числа черных клеток сохраниться, из исходных 32 черных клеток мы не сможем получить одну черную клетку.
10. Нет. **Решение**: При перекрашивании квадрата 2×2, содержащего k черных и $4-k$ белых клеток, получится $4-k$ черных и k белых клеток. Поэтому число черных клеток измениться на $(4-k)-k=4-2k$, т.е. на четное число. Так как четность числа черных клеток сохраняется, из исходных 32 черных клеток мы не сможем получить одну черную клетку.
11. Решение:



Рассмотрим 8 отмеченных клеток. Любая операция затрагивает либо 2 клетки их этих 8, либо ни одной. Таким образом, при указанных операциях сохраняется четность числа минусов, стоящих в отмеченных клетках. А так как

изначально в этих клетках стоял 1 минус (нечетное число), то таблицу из одних плюсов мы получить не можем (так как в этом случае в отмеченных клетках будет стоять 0 минусов – четное число).

12. *Указание*: Инвариант – остаток числа голов Змея Горыныча по модулю 7.

13. *Указание*: Используйте то, что у суммы цифр тот же остаток при делении на 9, что и у самого числа.

14. *Указание*: Сумма чисел в таблице не зависит от способа ее подсчета. Именно в этом смысле это – задача на инвариант.

15. Нельзя. *Указание*: Инвариантом служит четность числа неправильно стоящих стаканов.

16. Нет, не может. *Указание*: В качестве инварианта рассмотрите четность величины p, равной числу пар (a,b), в которых число a стоит правее числа b и при этом $a>b$.

17. Нет. *Указание*: Рассмотрите сумму квадратов чисел тройки.

18. Нет. **Решение**: Пусть $f(x)=Ax^2+Bx+C$ – квадратный трехчлен (с дискриминантом B^2-4AC). После первой операции трехчлен $f(x)$ меняется на трехчлен $(A+B+C)x^2+(B+2A)x+A$ с дискриминантом B^2-4AC, а после второй операции – на трехчлен $Cx^2+(B-2C)x+(A-B+C)$ с дискриминантом B^2-4AC. Итак, при выполнении разрешенных операций дискриминант сохраняется. Но у трехчлена x^2+4x+3 дискриминант равен 4, а у трехчлена $x^2+10x+9$ он равен 64. Поэтому, из квадратного трехчлена x^2+4x+3 получить трехчлен $x^2+10x+9$ нельзя.

19. Нет. **Решение**: Пусть на доске написано число $\overline{abcd}$. Тогда рассматриваемые операции не изменяют число $M=(d+b)-(a+c)$, так как они увеличивают (уменьшают) на единицу одно число из первой скобки, и одно число – из второй.

Для числа 1234 $M_1=(4+2)-(1+3)=2$, для числа 2002 $M_2=(2+0)-(2+0)=0$. Поэтому требуемое невозможно.

20. Не может. **Решение**: Заметим, что $P(-1)=(-1)^2+2=3$ и $Q(-1)=-1+1=0$. То есть значения многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ в точке $x_0=-1$ делятся на 3. Однако если для произвольных многочленов $A(x)$ и $B(x)$ их значения в точке $x_0=-1$ $A(-1)$ и $B(-1)$ делятся на 3, то и значения выражений $A(-1)+B(-1),\ A(-1)-B(-1)$ и $A(-1)\cdot B(-1)$ также делятся на 3. Однако $R(-1)=(-1)^3+2=1$ не делится на 3, то есть многочлен $R(x)=x^3+2$ на доске появиться не может.

21. Не может. **Решение**: Из того, что $a+b-\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+b^2+2ab}-\sqrt{a^2+b^2}>0$ при $a,b>0$ следует, что после указанных операций числа на доске остаются положительными. Покажем, что после указанной операции не меняется сумма обратных величин чисел, написанных на доске. Действительно,

$$\frac{1}{x+y+\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x+y-\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{2x+2y}{(x+y)^2-(x^2+y^2)}=\frac{2x+2y}{2xy}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

. Если одно из получившихся чисел меньше 1, то сумма обратных величин чисел, написанных на доске, будет больше 1. А так как $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{19}{20}<1$, то на доске не может появиться число, меньше 1.

22. Решение. Исходная карта – прямоугольник K_0, меньшая карта – прямоугольник $K_1\subset K_0$. Рассмотрим преобразование f, отображающее прямоугольник K_0 на K_1. Пусть $K_{i+1}=f(K_i)$. Так как последовательность K_i является стягивающейся последовательностью вложенных прямоугольников, существует единственная точка X, принадлежащая всем прямоугольникам K_i. Так как X принадлежит K_i, то точка $f(X)$ принадлежит K_{i+1}, т.е. точка $f(X)$ также принадлежит всем прямоугольникам K_i. Так как только одна точка, принадлежащая всем прямоугольникам, то $f(X) = X$.

23. Нет. **Решение.** В результате данной операции из чисел, делящихся на 7, получаются числа, делящиеся на 7.

24. Не могут. *Указания.* Достаточно заметить, что при казанных операциях наибольшее число (или одно из наибольших – если наибольших чисел несколько) должно уменьшиться. Поэтому через несколько операций на всех гранях не могут оказаться исходные числа.

25. **Решение.** Предположим, что на втором шаге путешественник не возвратился в A, то есть город C отличен от города A. Тогда расстояние от A до B короче расстояния от B до C (поскольку C – наиболее удаленный от B город). Каждое следующее расстояние будет не меньше предыдущего, так как каждый следующий раз мы выбираем наиболее удаленный город. Пусть на некотором шаге путешественник все же вернулся в город

A, выйдя из некоторого города X. По доказанному, расстояние от X до A длиннее расстояния от A до B. Но это противоречит тому, что B – наиболее удаленный от A город

26. **Решение.** Допустим, что на гранях куба написаны числа. Проделаем операцию, описанную в условии задачи, и полученные при этом числа напишем на гранях второго кубика. Со вторым кубиком проделаем то же самое и т.д. В результате получим 26 кубиков таких, что числа, написанные, на $i+1$–м кубике, получаются из чисел, написанных на i–м, с помощью процедуры, описанной в условии задачи. Пусть M_i $(i = 1,\dots,26)$ – наибольшее из чисел, записанных на гранях i–го кубика. Тогда $M_1 \geq \dots \geq M_{26}$. Но из условия $M_{26} = M_1$, так что

$M_1 = \ldots = M_{26}$. Рассмотрим 3-й кубик. На одной из его граней должно стоять число, равное M_1 и пусть это верхняя грань. Легко показать, что на четырех боковых гранях второго кубика должны стоять числа M_1. В точности, так же можно заключить, что на всех гранях первого кубика стоит число M_1. Но по предположению не все числа, написанные на гранях кубика, равны. Противоречие.

27. Решение. Какой бы набор из n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (среди которых не все равны между собой) мы не взяли, через несколько шагов максимальное число набора уменьшится, а минимальное увеличится. Отсюда ясно, что максимальное число не может все время оставаться целым, если, конечно, не получится набора из равных чисел $(a, a, \ldots, a)$.

Пусть из набора $z_1, \ldots, z_n$ впервые получается набор равных чисел: $(z_1 + z_2)/2 = (z_2 + z_3)/2 = \ldots = (z_{n-1} + z_n)/2 = (z_1 + z_n)/2$. Тогда числа z_i равны через одно. При нечетном n это невозможно. Пусть n четно. Посмотрим, из какого набора может получиться набор $(a, b, a, b, \ldots, a, b)$. Пусть

$(y_1 + y_2)/2 = (y_3 + y_4)/2 = \ldots = (y_{n-1} + y_n)/2 = a$;

$(y_2 + y_3)/2 = (y_4 + y_5)/2 = \ldots = (y_n + y_1)/2 = b$. Тогда

$y_1 + \ldots + y_n = 2na$, $y_2 + y_3 + \ldots + y_n + y_1 = 2nb$, т.е. $2an = 2nb$ и $a = b$. Итак, набор из попарно равных чисел получен быть не может.

28. Решение. В результате каждой операции сумма S попарных произведений соседних чисел увеличивается (в этой сумме $ab + bc + cd$ заменяется на $ac + cb + bd$, а $ab + cd < ac + bd$, если $(a-d)(b-c) < 0$). Но сумма S может принимать лишь конечное число различных значений.

29. Решение. Для доказательства достаточно заметить, что при перекрашивании любой «особой» точки в другой цвет число отрезков с разноцветными концами уменьшается, по крайней мере, на 1. Поэтому перекрашивание удается произвести только конечное число раз, после чего не остается ни одной «особой» точки.

30. Решение. Из неравенства $1/a+1/b\ge 4/(a+b)(a,b>0)$ следует, что после каждой операции сумма S обратных величин чисел, написанных на доске, не увеличивается. Вначале $S=n$, поэтому в конце $S\le n$, откуда следует требуемое утверждение.

31. Нет**. Решение.** На каждом шаге сокращается суммарная длина всех проведенных отрезков (это следует из неравенства треугольников), и всего существует лишь конечное число расположений отрезков с вершинами в данных точках. Поэтому данный процесс не может продолжаться бесконечно.

32. Решение. Рассмотрим следующую величину S: количество дорог, концы которых находятся в городах с флагами разных цветов. Рассмотрим город, в котором произошла революция. Пусть в городе был флаг красного цвета. Поскольку произошла революция, то он был заменен на флаг синего цвета. Это означает, что город был соединен с x городами с синими флагами и с y городами с красными флагами, причем $x>y$. До революции из этого города выходило x «разноцветных» дорог, а после стало выходить y «разноцветных» дорог. Это означает, что величина S уменьшилось на $x-y>0$. Поскольку S – целое неотрицательное число, то такое уменьшение S может быть проделано лишь конечное число раз, и в результате революции прекратятся.

33. Решение. Если мы добавим еще несколько черных клеток, то после каждой операции общее число черных клеток будет не меньше, чем в случае, когда мы не добавляли черных клеток. Добавим черные клетки так, чтобы все черные клетки (включая те, которые были изначально) образовали черный квадрат $m \times m$ клеток. Но такой квадрат исчезнет за $2m-1$ шаг. Значит, после $2m-1$ шага не останется ни одной черной клетки из исходного множества.

§4. Задачи на максимум-минимум

4.1. Примеры.

Широкий класс нестандартных задач представляют так называемые экстремальные задачи, в которых требуется найти максимум или минимум некоторой функции одной или нескольких переменных.

Общие вопросы нахождения экстремальных значений функции рассматриваются в курсе дифференциального исчисления, однако многие задачи на экстремумы можно решать «элементарными» средствами.

Пример 1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{x^2+x-2}{2x^2-x+3}$.

Решение. Преобразуем данное равенство $y \cdot (2x^2 - x + 3) = x^2 + x - 2$.

После преобразования полученное равенство рассмотрим как уравнение с неизвестным x и параметром y:

$$(2y-1)x^2 - (y+1)x + 3y + 2 = 0.$$

Для того чтобы уравнение имело решение, необходимо чтобы $D \geq 0$.

$$D = (y+1)^2 - 4(2y-1)(3y+2) = -23y^2 - 2y + 9 \geq 0,$$

откуда

$$\frac{-1-\sqrt{208}}{23} \leq y \leq \frac{-1+\sqrt{208}}{23}.$$

В полученном неравенстве слева записано наименьшее, справа наибольшее значения y.

Ответ: $y_{\text{наим}} = \frac{-1-\sqrt{208}}{23}$, $y_{\text{наиб}} = \frac{-1+\sqrt{208}}{23}$.

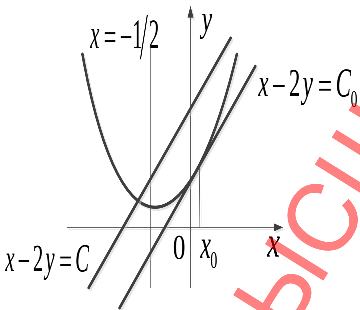
Пример 2. Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{2x+1} - x$.

Решение. Пусть $\sqrt{2x+1}=t$, где $t\geq 0$. Тогда $x=\frac{t^2-1}{2}$. Переходя к переменной t, получаем, что надо найти наибольшее значение функции $y=t-\frac{t^2-1}{2}=-\frac{t^2}{2}+t+\frac{1}{2}$ при условии $t\geq 0$. Выделяем полный квадрат: $y=-\frac{1}{2}(t-1)^2+1$. Наибольшее значение будет $y=1$ при $t=1$. Возвращаемся к x и находим, что наибольшее значение будет $y=1$ при $x=0$.

Ответ: $y_{\text{наиб}}=1$.

Пример 3. Среди всех решений неравенства $y-x\geq x^2+1$ найдите те, для которых $y-2x$ принимает наименьшее значение.

Решение.Преобразуем неравенство: $y\geq x^2+x+1$. Множество точек на плоскости, заданное неравенством, лежит выше параболы $y=x^2+x+1$ и на ее границе.



Пусть величина $y-2x$ принимает значение C. Множество всех точек плоскости таких, что $y-2x=C$, расположено на прямой, с ростом C эта прямая движется параллельно себе снизу вверх. Точки, удовлетворяющие исходному неравенству и лежащие на прямой $y-2x=C$, найдутся в том случае, если данная прямая пересекает параболу. C принимает свое наименьшее значение C_0, если прямая $y-2x=C_0$ касается параболы в некоторой точке x_0 .

Уравнение касательной к параболе $y=x^2+x+1$ в точке x_0 имеет вид

$$y=x_0^2+x_0+1+(2x_0+1)(x-x_0)=(2x_0+1)x+1-x_0^2 .$$

Из того, что эта касательная совпадает с прямой $y=2x+C_0$, следует, что $2x_0+1=2 \Leftrightarrow x_0=\frac{1}{2}$. Теперь уже легко найти, что $C_0=\frac{3}{4}$ и $y_0=x_0^2+x_0+1=\frac{7}{4}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{2};\frac{7}{4}\right)$

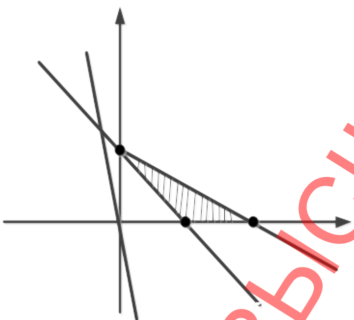
Пример 4. Найдите наибольшее значение параметра a, при котором совместна система

$$\begin{cases} x + 2y \le 2, \\ x + y \ge 1, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ a = 9x + 3y. \end{cases}$$

Решение.Рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} x + 2y \le 2, \\ x + y \ge 1, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$$

Множество решений системы – множество пар (x, y), которым соответствует множество точек заштрихованной области ABC с ее границей.



Пусть в уравнении $a = 9x + 3y$ параметр $a = 0$. Построим прямую, заданную уравнением $9x + 3y = 0$ $(y = -3x)$. При любом фиксированном значении параметра a прямая $a = 9x + 3y$ будет параллельна прямой $y = -3x$, и с увеличением значений параметра a она будет перемещаться вдоль оси ординат вверх.

Наибольшим значением параметра a, при котором прямая $a = 9x + 3y$ будет иметь общие точки с заштрихованной фигурой, окажется то значение, при котором прямая $a = 9x + 3y$ пройдет через точку $A(2; 0)$. Таким значением является $a = 18$.

Ответ: $a = 18$.

Многие математические задачи повышенной сложности решаются методами, в основу которых положено использование численных неравенств.

Неравенство Коши.

Пусть $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_n \geq 0$, тогда

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n},$$

где $n \geq 2$. Причем неравенство превращается в равенство тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Неравенства Бернулли.

Если $x > -1$, то для любого натурального n имеет место $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Причем равенство достигается при $x = 0$ или $n = 1$.

Если $p < 0$ или $p > 1$, то $(1+x)^p \geq 1 + px$,

если $0 < p < 1$,то $(1+x)^p \leq 1 + px$, где $x > -1$, равенства достигаются только при $x = 0$.

Неравенство Коши – Буняковского

Для произвольных $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$ имеет место

$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)$

где $n \geq 2$.

Пример 5. Найдите наибольшее значение выражения $3x - 2y$ на множестве переменных x, y, удовлетворяющих условию $4x^2 + y^2 = 16$.

Решение. *1 способ*. Перепишем выражение $f = 3x - 2y$ в виде $f = \frac{3}{2} \cdot 2x + (-2) \cdot y$.

В силу неравенства Коши-Буняковского

$$f \leq \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{4x^2 + y^2} = 10.$$

Равенство при этом достигается тогда, когда существует положительное число k такое, что

$2x = \frac{3}{2} \cdot k,\ \ y = (-2) \cdot k$.

Из условия $4x^2 + y^2 = 16$ следует, что $k = \frac{8}{5}$. Тогда $x = \frac{6}{5}$, $y = -\frac{16}{5}$ - при этих значениях переменных достигается наибольшее значение выражения $3x - 2y$.

2 способ. Введем дополнительную переменную $z = 3x - 2y$. Тогда задача может быть переформулирована следующим образом: найти наибольшее значение переменной z при условии, что выполнены равенства $z = 3x - 2y$, $4x^2 + y^2 = 16$.

Эти условия можно рассматривать как систему относительно неизвестных x и y:

$$\begin{cases} z = 3x - 2y, \\ 4x^2 + y^2 = 16. \end{cases}$$

Исключим из первого уравнения системы неизвестную y: $y = \frac{3x - z}{2}$. Тогда второе уравнение примет вид

$$25x^2 - 6xz + (z^2 - 64) = 0$$

и задача может быть переформулирована следующим образом: найти наибольшее значение переменной z при условии, что квадратное уравнение имеет решение. Это равносильно тому, что $\frac{D}{4} = -16z^2 + 1600 \geq 0$, т.е. равносильно неравенствам $-10 \leq z \leq 10$. Наибольшее значение переменной z, удовлетворяющей этому условию, равно 10.

3 способ. Ограничение $4x^2 + y^2 = 16$ напоминает уравнение окружности. Чтобы превратить его в уравнение, которое является уравнением окружности, разделим обе части на 16 и перепишем получившееся равенство в виде $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$.

Применим метод тригонометрических подстановок.

Равенство $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$ означает, что точка $\left(\frac{x}{2}; \frac{y}{4}\right)$ лежит на единичной окружности. Каждой точке соответствует одно значение α из промежутка $[0;2\pi)$ такое, что $\frac{x}{2} = cos\alpha$, $\frac{y}{4} = sin\alpha$, или, $x = 2cos\alpha$, $y = 4sin\alpha$.

Тогда задача может быть переформулирована следующим образом: найти наибольшее значение выражения $6cos\alpha - 8sin\alpha$ при условии, что $\alpha \in [0;2\pi)$.

Областью значений функции $f(\alpha) = a \cdot sin\alpha + b \cdot cos\alpha$ является отрезок $\left[-\sqrt{a^2 + b^2}; +\sqrt{a^2 + b^2}\right]$. Так как $f(\alpha)$ периодична с периодом 2π, ограничение $\alpha \in [0;2\pi)$ не меняет область значений.

В нашем случае $a = -8$, $b = 6$, так что $\sqrt{a^2 + b^2} = 10$.

4.2. Задачи для самостоятельного решения.

1. Найдите наименьшее значение выражения

$$\varphi = x^4 + y^4 + \frac{2}{x^2y^2}.$$

2. Известно, что $x + y + z = 1$. Найдите наименьшее значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

3. Найдите максимальное значение выражения

$$|x|\sqrt{16 - y^2} + |y|\sqrt{4 - x^2}.$$

4. Найдите наименьшее значение выражения

$$y = (x-1)(x-2)(x-5)(x-6) + 9.$$

5. Найдите наибольшее значение выражения $4x^2 + 80x + y + 43$ при условии, что $6x^2 + 32x + y + 283 \le 0$ и $x^2 + 86x + y + 202 \ge 0$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$, если известно, что

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \le 4, \quad x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \le 9.$$

7. Числа x, y и z таковы, что $x^2 + 3y^2 + z^2 = 2$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $2x + y - z$?

8. При каких значениях x и y выражение $z = \frac{3y^2 - 4xy}{x^2 + y^2}$ принимает наибольшее значение?

9. Найдите наименьшее значение суммы $\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} + \sqrt{1 + z^2}$, если числа x, y, z неотрицательны и $x + y + z = 1$.

10. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения $(a - v)^2 + (b - u)^2$, если $a^2 + b^2 = 1$,а $v^2 + u^2 = 4$.

11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + xy + y^2$ при условии $1 \le x^2 + y^2 \le 2$.

12. Найдите все пары $(x; y)$ положительных чисел, на которых достигается наименьшее значение функции $f(x, y) = \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$,и найти это наименьшее значение.

13. Найдите наибольшее значение произведения $x^2y^2z^2u$ при условии, что $x, y, z, u \ge 0$ и $2x + xy + z + yzu = 1$.

14. Среди всех решений (a, b, c, d) системы

$$\begin{cases} a^2+b^2=9, \\ c^2+d^2=16, \\ ad+bc \geq 12 \end{cases}$$

найдите такие, при каждом из которых выражение $b+d$ принимает наименьшее значение.

15. Среди всех решений (x, y, z, v) системы

$$\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ z^2+v^2=9, \\ xv+yz \geq 6 \end{cases}$$

найдите такие, при каждом из которых выражение $x+z$ принимает наибольшее значение.

16. Найдите наименьшее значение выражения

$$(x-y)^2+3(y-z)^2-5(z-x)^2, \text{если } x, y, z \in [-1; 1].$$

17. Найдите наименьшее значение выражения

$$f(x,y)=x^2+5y^2+4xy+6y+10.$$

18. Найдите наибольшее значение выражения x^2y-y^2x, где $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

19. Найдите минимальное значение выражения $(x+y)(y+z)$, если x, y, z – положительные числа и $xyz(x+y+z)=9$.

20. Найдите наименьшее значение выражения $x^2+5y^2+8z^2$, если $xy+xz+yz=-1$.

21. Найдите максимальное значение функции

$f(x,y,z)=x+y+z-xy-xz-yz+xyz$, где

$x^2+y^2+z^2=1$.

22. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x)=\sqrt{1-\frac{x}{3}}+\sqrt[6]{x+1}\,.$$

23. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(x,y)=6\sin x\cdot\cos y+2\sin x\cdot\sin y+3\cos x.$$

24. Пусть $x^2+3y^2+z^2=2$. Найдите наименьшее значение функции $f(x,y,z)=2x+y-z$.

25. Найдите минимальное значение функции $f(x)=\frac{x^6+5x^3+5}{x^3+1}$.

26. Найдите минимальное значение функции

$f(x)=\left(\frac{1+\sin^2 x}{\sin^2 x}\right)^n+\left(\frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)^n$, где n - натуральное число.

27. Найдите минимальное значение функции

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4x+2y+5}+\sqrt{x^2+y^2+6x-4y+13}.$$

28. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+x+y+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+y^2-2x+4y+5}}.$$

29. Найдите наименьшее значение выражения

$|x-y|+\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}$.

30. Найдите наибольшее возможное значение выражения: $20x-4y+6z-2x^2-4y^2-3z^2-2$.

При каких значениях x,y,z оно достигается?

31. Изобразите множество точек на координатной плоскости, для координат x и y которых выражение $\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ принимает наибольшее значение.

32. Про квадратный трехчлен $f(x)=ax^2-ax+1$ известно, что $|f(x)|\le 1$ при $0\le x\le 1$. Найдите наибольшее возможное значение a.

33. При каких значениях параметра a разность корней квадратного уравнения

$x^2-6x+12+a^2-4a=0$ принимает наибольшее значение?

34. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения x^2+xy+y^2, если $1\le x^2+y^2\le 2$.

35. Найдите наименьшее значение выражения $\frac{y}{x}$, если известно, что $x^2-10x+y^2-2y+1=0$.

36. Найдите наименьшее значение выражения

$$|2x-y-1|+|x+y|+|y|,$$

где x и y - произвольные действительные числа.

37. Найдите наибольшее значение выражения

$$\sqrt{(x-1)(y-x)}+\sqrt{(7-y)(1-x)}+\sqrt{(x-y)(y-7)}$$

при $x\in[-2;3]$ и $y\in[0;11]$.

4.3. Решения, указания, ответы.

1. $\varphi_{min}=4$. **Решение**. Преобразуем данное выражение к виду

$$\varphi=x^4+y^4+\frac{2}{x^2y^2}=(x^2-y^2)^2+2\left(x^2y^2+\frac{1}{x^2y^2}\right).$$

Используя неравенство $a + \frac{1}{a} \geq 2$ при $a > 0$, получим, при $a = x^2y^2$, $\varphi \geq (x^2 - y^2)^2 + 4$. (1)
Причем знак равенства выполняется при условии $x^2y^2 = 1$. (2)

Первая часть соотношения (1) будет наименьшей, если $x^2 = y^2$ или, с учетом условия (2), $x^2 = 1$, $y^2 = 1$. Итак, наименьшее значение выражения равно $\varphi_{min} = 4$ при $|x| = 1$, $|y| = 1$. **2.** $\frac{1}{3}$. *Указание*: Воспользуйтесь неотрицательностью дискриминанта квадратного трехчлена.

3. 8. *Указание*: Примените неравенство Коши – Буняковского.

4. $y_{min} = 5$. **Решение**. Преобразуем функцию следующим образом: $y = [(x-1)(x-6)] \cdot [(x-2)(x-5)] + 9 =$
$= (x^2 - 7x + 6)(x^2 - 7x + 10) + 9 =$
$= (x^2 - 7x)^2 + 16(x^2 - 7x) + 69 = (x^2 - 7x + 8)^2 + 5.$

Отсюда видно, что наименьшее значение функции $y_{min} = 5$, если $x^2 - 7x + 8 = 0$, т.е. $x = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{2}$.

5. $z_{max} = 30$. **Решение**.Пусть $z = 4x^2 + 80x + y + 43$. Нахождение максимума z при заданных условиях эквивалентно определению максимального из значений z, при которых существует решение системы

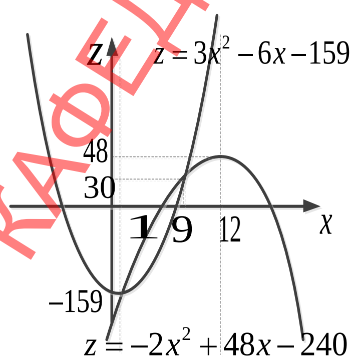
$$\begin{cases} 4x^2 + 80x + y + 43 = z, \\ x^2 + 86x + y \geq -202, \\ 6x^2 + 32x + y \leq -283. \end{cases}$$

Исключая y из уравнения и подставляя в неравенства, имеем

$$\begin{cases} z \geq 3x^2 - 6x - 159, \\ z \leq -2x^2 + 48x - 240. \end{cases}$$

Геометрическая интерпретация на плоскости (x, z) дает фигуру между двумя параболами.

Найдем абсциссы точек пересечения этих парабол:



$3x^2 - 6x - 159 =$
$= -2x^2 + 48x - 240$
$\Leftrightarrow x_1 = \frac{9}{5};\ x_2 = 9.$

Так как вершина параболы

$z = -2x^2 + 48x - 240$ лежит правее отрезка $\left[\frac{9}{5}; 9\right]$, то максимальное значение z достигается в точке $x = 9$. Оно равно 30.

6. $y_{наим} = -6$, $y_{наиб} = 6$. **Решение**. На основании неравенства Коши – Буняковского имеем:

$y^2 = (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2 \leq (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)$.

В нашей задаче $y^2 \leq 4 \cdot 9 = 36$. Отсюда $-6 \leq y \leq 6$. Так как в неравенстве Коши – Буняковского равенство достигается, то наименьшее значение $y = -6$, а наибольшее значение $y = 6$.

7. $\sqrt{\frac{32}{3}}$. *Указание*: Пусть $t = 2x + y - z$. Выражая z через x, y, t приходим к уравнению, квадратному относительно y

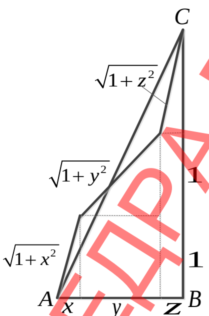
$$4y^2 + 2(2x - t)y + 5x^2 + t^2 - 2x - 4xt = 0.$$

Для существования решений этого уравнения необходимо выполнение условия неотрицательности его дискриминанта, которое после преобразований записывается в виде

$$16x^2 - 12xt + 3t^2 - 8 \leq 0.$$

Для того чтобы последнее неравенство имело решение, в свою очередь, необходима неотрицательность его дискриминанта, что приводит к неравенству $12t^2 \leq 128$.

8. $z_{наиб} = 4$. *Указание.* Представьте z в виде $4 - \frac{(y+2x)^2}{x^2+y^2}$.



9. $\sqrt{10}$. **Решение.** Наименьшее значение суммы равно $\sqrt{10}$ при $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Данная сумма – это длина ломаной линии, изображенной на рисунке ($AB = 1$, $BC = 3$). Минимум суммы достигается, когда $x = y = z$, а ломаная при этом совпадает с отрезком AC.

10. Наибольшее и наименьшее значение 9 и 1. **Решение.** Наибольшее и наименьшее значение 9 и 1. Точка $(a; b)$ лежит на окружности $x^2 + y^2 = 1$, а точка $(u; v)$ – на окружности $x^2 + y^2 = 4$.

11. $z_{min} = 1/2\,, z_{max} = 3$. **Решение.** Пусть $x = r \cdot cos\varphi, y = r \cdot sin\varphi$. Тогда $1 \leq |r| \leq \sqrt{2}$ и $z = r^2\left(1 + \frac{1}{2}sin2\varphi\right)$,
$z_{min} = 1/2\,, z_{max} = 3$.

12. $x = y$. **Решение**. Наименьшее значение функции $f(x, y)$ при $x, y > 0$ равно 2, поскольку имеют место соотношения $f(x, y) - 2 = \left(\frac{x^2}{y^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{x}{y} - 2 + \frac{y}{x}\right) \geq \frac{(x-y)^2}{xy} \geq 0$, а равенство $f(x, y) = 2$ достигается только тогда, когда $x = y$.

13. $1/512$. **Решение**. Используя неравенство Коши, имеем
$\sqrt[4]{2x^2y^2z^2u} = \sqrt[4]{2x \cdot xy \cdot z \cdot yzu} \leq \frac{2x+xy+z+yzu}{4} = \frac{1}{4}$,
т.е. $x^2y^2z^2u \leq 1/512$. Равенство достигается, если
$2x = xy = z = yzu = 1/4$, т.е. при $x = 1/8\,,\ y = 2$,
$z = 1/4,\ u = 1/2$. Итак, наибольшее значение равно $1/512$.

14. $a = -\frac{12}{5}$; $b = -\frac{9}{5}$; $c = -\frac{12}{5}$; $d = -\frac{16}{5}$.

Решение. Преобразуем систему к виду:

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^2 = 1, \\ \left(\frac{c}{4}\right)^2 + \left(\frac{d}{4}\right)^2 = 1, \\ ad + bc \geq 12 \end{cases}$$

Применяя основное тригонометрическое тождество
$cos^2t + sin^2t = 1\ (t \in \mathbb{R})$, сделаем замену переменных: $\frac{a}{3} = cos\alpha$; $\frac{b}{3} = sin\alpha$; $\frac{c}{4} = sin\beta$; $\frac{d}{4} = cos\beta$.

Тогда неравенство системы принимает вид:

$$12(cos\alpha \cdot cos\beta + sin\alpha \cdot sin\beta) \geq 12 \Leftrightarrow \cos(\alpha - \beta) = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha - \beta = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \beta + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Запишем выражение

$$b + d = 3sin\alpha + 4cos\beta = 3sin\beta + 4cos\beta = 5\sin(\beta + \varphi),$$

где $cos\varphi = \frac{3}{5}, sin\varphi = \frac{4}{5}$.

Наименьшее значение суммы $b + d$ достигается при

$$\sin(\beta + \varphi) = -1 \Leftrightarrow \beta + \varphi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Найдем теперь a, b, c, d.

$a = 3cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -3sin\varphi = -\frac{12}{5}$;

$b = -3sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -3cos\varphi = -\frac{9}{5}$;

$c = -4cos\varphi = -\frac{12}{5}; d = -4sin\varphi = -\frac{16}{5}$.

Таким образом, $a = -\frac{12}{5}$; $b = -\frac{9}{5}$; $c = -\frac{12}{5}$; $d = -\frac{16}{5}$.

15. $x = \frac{4}{\sqrt{13}}, y = \frac{6}{\sqrt{13}}, z = \frac{9}{\sqrt{13}}, v = \frac{6}{\sqrt{13}}$. **Решение**. Рассмотрим два вектора $\bar{p}$ и $\bar{q}$ с координатами $\bar{p}(x, y), \bar{q}(v, z)$. Если координаты этих векторов удовлетворяют всем условиям задачи, то первое уравнение системы означает, что длина вектора $\bar{p}$ равна 2, а длина вектора $\bar{q}$ равна 3: $|\bar{p}| = 2, |\bar{q}| = 3$. Левая часть последнего неравенства системы является координатной записью скалярного произведения векторов $\bar{p}$ и $\bar{q}$. Таким образом, $\bar{p} \cdot \bar{q} \geq 6$.

С другой стороны, если φ – угол между векторами $\bar{p}$ и $\bar{q}$, то

$\bar{p} \cdot \bar{q} = |\bar{p}| \cdot |\bar{q}| \cdot cos\varphi = 6cos\varphi \geq 6 \Leftrightarrow cos\varphi = 1$.

Значит $\varphi = 0$, и векторы $\bar{p}$ и $\bar{q}$ – сонаправлены, то есть $\bar{q} = t \cdot \bar{p}$, где $t > 0$. Число $t = \frac{|\bar{q}|}{|\bar{p}|} = \frac{3}{2}$. Значит $\begin{cases} v = \frac{3}{2}x, \\ z = \frac{3}{2}y \end{cases}$

Выражение $x + z$ принимает вид: $x + z = x + \frac{3}{2}y = \bar{p} \cdot \bar{c}$, где $\bar{c}\left(1, \frac{3}{2}\right)$. Так как $\bar{p} \cdot \bar{c} = |\bar{p}| \cdot |\bar{c}| \cdot cos\alpha$, где α – угол между векторами $\bar{p}$ и $\bar{c}$, то наибольшее значение суммы $x + z$ достигается при $\alpha = 0$. Значит $\bar{p} = m\bar{c}$, где $m > 0$ и $m = \frac{|\bar{p}|}{|\bar{c}|} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{9}{4}}} = \frac{4}{\sqrt{13}}$. Итак, выражение $x + z$ принимает наибольшее значение, если $x = \frac{4}{\sqrt{13}} \cdot 1 = \frac{4}{\sqrt{13}}$; $y = \frac{4}{\sqrt{13}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{\sqrt{13}}$;

$z = \frac{3}{2}y = \frac{9}{\sqrt{13}}; v = \frac{3}{2}x = \frac{6}{\sqrt{13}}$.

Таким образом, $x = \frac{4}{\sqrt{13}}, y = \frac{6}{\sqrt{13}}, z = \frac{9}{\sqrt{13}}, v = \frac{6}{\sqrt{13}}$.

16. - 17; это значение достигается в точках $(-1; 0{,}5; 1)$ и $(1; -0{,}5; -1)$. **17**. 1; это значение достигается в точке $(6; -3)$.
18. $\frac{1}{4}$; при $x = 1, y = \frac{1}{2}$. **19**. 6. **20**. 4.
21. $f_{max}(x,y,z) = 1$. **Решение**. Представим функцию в виде:
$f(x,y,z) = (x-1)(y-1)(z-1) + 1$.
Так как $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, то $x \le 1, y \le 1, z \le 1$ или
$x - 1 \le 0, y - 1 \le 0, z - 1 \le 0$.
Тогда $(x-1)(y-1)(z-1) \le 0$ и $f(x,y,z) \le 1$.
Пусть $(x-1)(y-1)(z-1) = 0$, тогда $x_0 = 1$.
Поскольку $x_0 = 1$, то из уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ следует, что $y^2 + z^2 = 0$ и $y_0 = z_0 = 0$. Так как $f(1,0,0) = 1$, то $f_{max}(x,y,z) = 1$.
22. $f_{max} = 2$. **Решение**. Областью определения функции $f(x)$, является решение системы:

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{x}{3} \ge 0, \\ x + 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x \le 3.$$

Пусть $-1 < x < 3$, тогда для установления верхней оценки функции $f(x)$ воспользуемся неравенством Бернулли и получим

$$\sqrt{1 - \frac{x}{3}} + \sqrt[6]{x+1} = \left(1 - \frac{x}{3}\right)^{1/2} + (1+x)^{1/6} \le 1 - \frac{x}{6} + 1 + \frac{x}{6} = 2.$$

Поскольку $f(0) = 2, f(-1) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ и $f(3) = \sqrt[3]{2}$, то
$f_{max} = f(0) = 2$.
23. $f_{max} = 7, f_{min} = -7$. **Решение**. Применяя неравенство Коши – Буняковского, из выражения
$f(x,y) = 6\sin x \cdot \cos y + 2\sin x \cdot \sin y + 3\cos x$ получаем

$$f^2(x,y) \le (6^2 + 2^2 + 3^2)(\sin^2 x\cos^2 y + \sin^2 x\sin^2 y + \cos^2 x) =$$
$$= 49(\sin^2 x(\cos^2 y + \sin^2 y) + \cos^2 x) = 49(\sin^2 x + \cos^2 x) = 49.$$

Отсюда получаем $-7 \le f(x,y) \le 7$. Покажем, что нижняя и верхняя оценки функции $f(x,y)$: $f_{min} = -7$ и $f_{max} = 7$.
Для этого рассмотрим условия, при которых неравенство Коши – Буняковского превращается в равенство.

Применительно к заданной функции $f(x,y)$, получаем систему уравнений $\begin{cases} 6 = a\sin x \cdot \cos y, \\ 2 = a\sin x \cdot \sin y, \\ 3 = a\cos x \end{cases}$ где a – некоторая константа.

Возведем в квадрат левые и правые части уравнений системы, тогда после их последующего сложения получаем $a^2 = 49$.

Пусть $a = 7$, тогда из системы уравнений следует

$$\cos x = \frac{3}{7}, \qquad \sin x = \pm\sqrt{1 - \frac{9}{49}} = \pm\frac{2\sqrt{10}}{7},$$

$$\sin y = \frac{2}{7\cdot\left(\pm\frac{2\sqrt{10}}{7}\right)} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}, \cos y = \frac{6}{7\cdot\left(\pm\frac{2\sqrt{10}}{7}\right)} = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Если $\cos x = \frac{3}{7}, \sin x = \frac{2\sqrt{10}}{7}, \sin y = \frac{1}{\sqrt{10}}, \cos y = \frac{3}{\sqrt{10}}$, то

$$f_{max} = 6\cdot\frac{2\sqrt{10}}{7}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} + 2\cdot\frac{2\sqrt{10}}{7}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} + 3\cdot\frac{3}{7} = 7.$$

Если $\cos x = -\frac{3}{7}, \sin x = -\frac{2\sqrt{10}}{7}, \sin y = \frac{1}{\sqrt{10}}, \cos y = \frac{3}{\sqrt{10}}$, то

$$f_{min} = 6\cdot\left(-\frac{2\sqrt{10}}{7}\right)\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} + 2\cdot\left(-\frac{2\sqrt{10}}{7}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} + 3\cdot\left(-\frac{3}{7}\right) = -7.$$

24. $f_{min}(x,y,z) = -\frac{4\sqrt{6}}{3}$. **Решение**. Воспользуемся неравенством Коши – Буняковского, тогда

$$f^2(x,y,z) = (2x + y - z)^2 = \left(2x + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}y + (-1)\cdot z\right)^2 \le$$

$$\le \left(4 + \frac{1}{3} + 1\right)\cdot(x^2 + 3y^2 + z^2) = \frac{16}{3}\cdot 2 = \frac{32}{3}.$$

Отсюда получаем, что $|f(x,y,z)| \le \frac{4}{3}\sqrt{6}$.

Неравенство обратиться в равенство тогда, когда

$\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}y}{1/\sqrt{3}} = \frac{z}{-1} = a$. Отсюда следует, что $x = 2a, y = \frac{a}{3}, z = -a$.

Так как $x^2 + 3y^2 + z^2 = 2$, то $4a^2 + \frac{a^2}{3} + a^2 = 2$ или $a = \pm\frac{\sqrt{6}}{4}$.

В таком случае

$$f_{min}(x,y,z) = f\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{12}, \frac{\sqrt{6}}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{6}}{12}\right) - \frac{\sqrt{6}}{4} = -\frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

25. $f_{min} = 5$. **Решение**. Представим функцию $y = f(x)$ в виде

$$f(x) = x^3 + 4 + \frac{1}{x^3+1} = \left(x^3 + 1 + \frac{1}{x^3+1}\right) + 3.$$

Используя неравенство Коши , получим неравенство
$x^3+1+\frac{1}{x^3+1}\geq 2$. Поэтому имеет место нижняя оценка функции $y=f(x)$ вида $f(x)\geq 5$. Поскольку $f(0)=5$, то полученная нижняя оценка достижима, т.е. $f_{min}=5$.

26. $f_{min}=2\cdot 3^n$. **Решение.** Используя неравенство Коши, оценим функцию $f(x)$ снизу, следующим образом:

$$\left(\frac{1+\sin^2 x}{\sin^2 x}\right)^n+\left(\frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)^n=\left(1+\frac{1}{\sin^2 x}\right)^n+\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\right)^n\geq$$

$$\geq 2\cdot\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sin^2 x}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\right)}\right)^n=$$

$$=2\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}}\right)^n=$$

$$=2\cdot\left(\sqrt{1+\frac{2}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}}\right)^n=2\cdot\left(\sqrt{1+\frac{8}{\sin^2 2x}}\right)^n\geq$$

$$\geq 2\cdot\left(\sqrt{1+8}\right)^n=2\cdot 3^n\,.$$

Покажем, что $f_{min}=2\cdot 3^n$. Найдем такое x, при котором функция $f(x)$ принимает минимальное значение $2\cdot 3^n$.

Если $f(x)=2\cdot 3^n$, то неравенства Коши обращаются в равенства, поэтому равенство
$f(x)=2\cdot 3^n$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases}\sin^2 x=\cos^2 x,\\ \sin^2 2x=1\end{cases}$$

Одним из корней данной системы является $x_1=\frac{\pi}{4}$.

Тогда $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^n+\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^n=3^n+3^n=2\cdot 3^n$.

Следовательно, $f_{min}=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cdot 3^n$.

27. $f_{min}=\sqrt{34}$. **Решение.** Преобразуем функцию $f(x,y)$ к виду:

$$f(x,y)=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2}$$

Введем на плоскости векторы $\bar{a},\bar{b}$ с координатами $(x-2;y+1)$ и $(x+3;y-2)$ соответственно. Так как

$|\bar{a}| = \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$ и $|\bar{b}| = \sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2}$, то $f(x,y) = |\bar{a}| + |\bar{b}|$.

Пусть $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$, тогда координатами вектора $\bar{c}$ являются $(-5;3)$ и $|\bar{c}| = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{34}$.

Так как $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$, то $|\bar{a}| + |\bar{b}| \geq |\bar{a} - \bar{b}|$ и $f(x,y) \geq \sqrt{34}$. Определим значения $x = x_1, y = y_1$, при которых функция $f(x,y)$ принимает минимальное значение $\sqrt{34}$.

Если $f(x,y) = \sqrt{34}$, то $|\bar{a}| + |\bar{b}| = |\bar{a} - \bar{b}|$, т.е. векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарные. Отсюда следует, что $\frac{x-2}{x+3} = \frac{y+1}{y-2}$ или $x = \frac{1-5y}{3}$.

Пусть $y_1 = -1$, тогда $x_1 = \frac{1-5y_1}{3} = 2$.

Если значения x_1 и y_1 подставить в $f(x,y) = \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2} + \sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2}$, то $f(2,-1) = \sqrt{34}$. Следовательно, минимальное значение функции $f(x,y)$ равно $f_{min} = \sqrt{34}$. **28.** $\frac{9}{2}$. **29.** $2\sqrt{2}$.

30. Наибольшее значение равно 52, при $x = 5, y = -0{,}5$ и $z = 1$. **Решение.** Преобразуем данное выражение:

$$20x - 4y + 6z - 2x^2 - 4y^2 - 3z^2 - 2 =$$
$$= (-2x^2 + 20x) - (4y^2 + 4y) - (3z^2 - 6z) - 2 =$$
$$= -2(x^2 - 10x + 25 - 25) - -(4y^2 + 4y + 1 - 1) -$$
$$-(3z^2 - 6z + 3 - 3) - 2 = -2(x-5)^2 + 50 - (2y+1)^2 +$$
$$+1 - 3(z-1)^2 + 3 - 2 =$$
$$= 52 - 2(x-5)^2 - (2y+1)^2 - 3(z-1)^2.$$

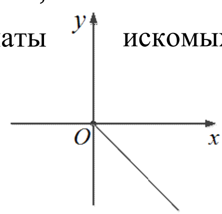
Так как $2(x-5)^2 \geq 0, (2y+1)^2 \geq 0, 3(z-1)^2 \geq 0$, то наибольшее возможное значение выражения равно 52. Оно достигается при $x = 5, y = -0{,}5$ и $z = 1$.

31. Решение. Преобразуем данное выражение:

$$\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Существует такое α, что $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\alpha$, а $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\alpha$.

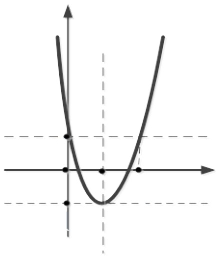
Имеем: $\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$, причем значение $\sqrt{2}$ достигается, если $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 1$, то есть, при $\alpha = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Координаты искомых точек



находим, решая систему уравнений:

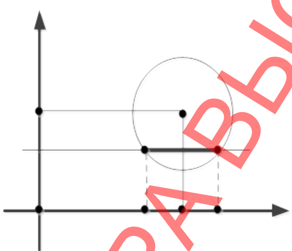
$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x, \\ x > 0, \\ y < 0. \end{cases}$$

32. $a = 8$. **Решение.** Так как $f(0) = f(1) = 1$, то графиком трехчлена является парабола, симметричная относительно прямой $x = 0{,}5$.



Из условия $|f(x)| \le 1$ при $0 \le x \le 1$ следует, что «ветви» параболы направлены вверх, а наибольшее значение a достигается в случае, когда наименьшее значение функции равно -1. Из того, что $f(0{,}5) = -1$, получаем, что $a = 8$.

33. $a = 2$. **Решение.** *1 способ.* Исходное уравнение равносильно уравнению $(x-3)^2 + (a-2)^2 = 1$. Графиком этого уравнения в системе координат $(x; a)$ является окружность с центром в точке $(3; 2)$ и радиусом 1.



Рассмотрим произвольную прямую, параллельную оси x и пересекающую окружность в двух точках. Абсциссы этих точек x_1 и x_2 являются корнями уравнения, а разность $x_2 - x_1$ равна длине хорды окружности. Эта разность будет наибольшей, в случае, если хорда является диаметром, то есть, при $a = 2$.

2 способ. Данное уравнение имеет два различных корня, если $D/4 = 9 - 12 - a^2 + 4a = -a^2 + 4a - 3 > 0$. Разность $x_2 - x_1 = 3 + \sqrt{D/4} - \left(3 - \sqrt{D/4}\right) = \sqrt{D}$ принимает наибольшее значение при наибольшем значении дискриминанта. Рассмотрим квадратный трехчлен

$D/4=-a^2+4a-3=-(a-2)^2+1$. Он принимает наибольшее значение при $a=2$, и это значение положительно.

34. Наибольшее значение равно 3 , $a=\sqrt{2},\ \ \alpha=\frac{\pi}{4}$, наименьшее значение 0,5 , $a=1, \alpha=-\frac{\pi}{4}$. **Решение.** *1 способ.* Найдем наибольшее значение. Воспользуемся неравенством $xy\le \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, получим, что $x^2+xy+y^2\le \frac{3}{2}(x^2+y^2)\le 3$. Равенство достигается, например, при $x=y=1$.

Найдем наименьшее значение. Воспользуемся неравенством $xy\ge -\frac{1}{2}(x^2+y^2)$,получим, что $x^2+xy+y^2\ge \frac{1}{2}(x^2+y^2)\ge \frac{1}{2}$. Равенство достигается, например, при $x=\frac{\sqrt{2}}{2}; y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2 способ. Из условия задачи следует, что существуют такие $a\in\left[1;\sqrt{2}\right]$ и $\alpha\in(-\pi;\pi]$, что $x=a\cdot\cos\alpha; y=a\cdot\sin\alpha$. Тогда $x^2+xy+y^2=a^2+a^2\cos\alpha\cdot\sin\alpha=a^2(1+0{,}5\sin2\alpha)$. Так как $-1\le\sin2\sqrt{2}\le 1$, то наибольшее значение полученного выражения достигается при $a=\sqrt{2},\ \ \alpha=\frac{\pi}{4}$ и равно 3, а наименьшее значение достигается при $a=1, \alpha=-\frac{\pi}{4}$ и равно 0,5.

35. $-2\frac{2}{5}$. **Решение.** Пусть $k=\frac{y}{x}$. Найдем наименьшее значение k, при котором имеет решение система уравнений:

$$\begin{cases} y=kx,\\ x^2-10x+y^2-2y+1=0.\end{cases}$$

Подставим во второе уравнение значение k и выполним преобразования: $x^2-10x+(kx)^2-2kx+1=0\Leftrightarrow$

$$(1+k^2)x^2-2(5+k)x+1=0.$$

Рассматриваемая система уравнений имеет решение тогда, когда имеет решение квадратное уравнение, то есть когда дискриминант $D\ge 0$. Значит, $(5+k)^2-(1+k^2)\ge 0\Leftrightarrow$ $10k\ge -24\Leftrightarrow k\ge -2\frac{2}{5}$. Наименьшее значение k, удовлетворяющее этому условию, равно $-2\frac{2}{5}$.

36. $\frac{1}{3}$. **Решение**. Преобразуем исходное выражение:

$|2x-y-1|+|x+y|+|y|=|y-(2x-1)|+|y-(-x)|+|y-0|$.

При фиксированном x выражение

$|y-(2x-1)|+|y-(-x)|+|y-0|$ принимает минимальное значение $m(x)$ при y, равном *среднему* из трех чисел $2x-1,\ -x,\ 0,$ при этом само $m(x)$ равно разности максимального и минимального из этих трех чисел. Эта разность минимальна при $x=\frac{1}{3}$ и равна $\frac{1}{3}$.

37. 3. **Решение**. Данное выражение

$$A=\sqrt{(x-1)(y-x)}+\sqrt{(7-y)(1-x)}+\sqrt{(x-y)(y-7)}$$

определено, если

$$\begin{cases}(x-1)(y-x)\ge 0\\(7-y)(1-x)\ge 0\\(x-y)(y-7)\ge 0\end{cases} \Rightarrow$$

$$-(x-1)^2(y-7)^2(y-x)^2\ge 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\y=7\\y=x.\end{array}\right.$$

1. При $x=1$ имеем $y\in[0;11]$ и

$A=A(y)=\sqrt{(1-y)(y-7)}=\sqrt{9-(y-4)^2}\le A(4)=3.$

2. При $y=7$ имеем $x\in[-2;3]$ и

$A=A(x)=\sqrt{(x-1)(7-x)}=\sqrt{9-(x-4)^2}\le A(3)<A(4)=3.$

3. При $y=x$ имеем $x\in[-2;3]\cap[0;11]=[0;3]$ и

$A=A(x)=\sqrt{(7-x)(1-x)}=\sqrt{(x-4)^2-9}\le A(0)=\sqrt{7}<3.$

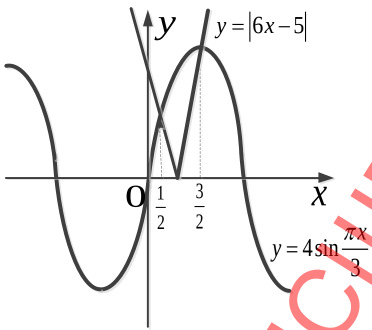
Таким образом, $A_{max}=3.$

§5. Нестандартные уравнения, неравенства, системы.

5.1.Основы теории. Примеры.

При решении нестандартных уравнений или неравенств иногда полезно рассмотреть графики их правых и левых частей. Эскиз графиков поможет выяснить, на какие множества надо разбить числовую ось, чтобы на каждом из них решение уравнения (или неравенства) было очевидно. Найденные при помощи графиков решения подлежат обязательной проверке.

Пример 1. Решите уравнение $|6x-5| = 4sin\frac{\pi x}{3}$.



Решение. Рассмотрим функции $y = |6x-5|$ и $y = 4sin\frac{\pi x}{3}$. Построим графики данных функций и найдем точки их пересечения.

Абсциссы данных точек $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{3}{2}$ являются корнями уравнения $|6x-5| = 4sin\frac{\pi x}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{2};\frac{3}{2}$.

Знание ОДЗ позволяет доказать, что уравнение (или неравенство) не имеет решений, а иногда позволяет найти решения уравнения (или неравенства) непосредственной подстановкой чисел из ОДЗ.

Пример 2. Решите уравнение $\sqrt{3-x} = \log_5(x-3)$.
Решение.ОДЗ этого уравнения состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям $3-x \geq 0$ и $3-x > 0$, то есть ОДЗ есть пустое множество. Этим решение уравнения и завершается, так как установлено, что уравнение не имеет корней.
Ответ: решений нет.

При решении уравнений и неравенств используются свойства монотонности, основанные на следующих утверждениях.

1. Пусть $f(x)$ – непрерывна и строго монотонная функция

на промежутке I, тогда уравнение $f(x) = C$, где C – данная константа, может иметь не более одного решения на промежутке I.
2.Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные на промежутке I функции, $f(x)$ строго возрастает, а $g(x)$ строго убывает на этом промежутке, тогда уравнение $f(x) = g(x)$ может иметь не более одного решения на промежутке I.

Пример 3. Решите уравнение

$$\sqrt[4]{x-1} + 2\sqrt[3]{3x+2} = 4 + \sqrt{3-x}.$$

Решение. Подбором находим, что уравнение имеет корень $x = 2$. Так как в области определения уравнения, то есть на отрезке $[1; 3]$, функция $y = \sqrt[4]{x-1} + 2\sqrt[3]{3x+2}$ возрастает, а функция $y = 4 + \sqrt{3-x}$ убывает, то других корней уравнение не имеет. Таким образом $x = 2$ – единственный корень.
Ответ: 2.

Пример 4. Решите уравнение $\log_2(1 + \sqrt{x}) = \log_3 x$.
Решение. Пусть $\log_3 x = t$. Тогда $x = 3^t, \sqrt{x} = (\sqrt{3})^t$. Заданное уравнение перепишем следующим образом:

$$\log_2\left(1 + (\sqrt{3})^t\right) = t,$$

откуда $1 + (\sqrt{3})^t = 2^t$. Это уравнение имеет корень $t = 2$. Выясним, имеются ли другие корни у полученного уравнения. Левая и правая части уравнения – возрастающие функции, но если обе части разделить почленно на $(\sqrt{3})^t$, то получим:
$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t + 1 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^t$.

Теперь показательная функция $y = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t + 1$, в левой части уравнения, убывает (основание $\frac{1}{\sqrt{3}} < 1$), а показательная функция $y = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^t$ в правой части – возрастает (основание $\frac{2}{\sqrt{3}} > 1$). Значит, $t = 2$ – единственный корень уравнения.

Поскольку $t = \log_3 x$, то из уравнения $\log_3 x = 2$ находим $x = 9$ – единственный корень исходного уравнения.

Ответ: 9.

В следующих задачах рассмотрены применения производных при решении уравнений.

Пример 5. Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-7}+\left(\sqrt{x-5{,}3}\right)^2+13{,}3=\frac{x^2-2x+1}{x-3}+x.$$

Решение. Выполняя преобразования, получим

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-7}+8=\frac{(x-1)^2}{x-3}.$$

Подбором находим, что уравнение имеет корень $x=7$. Выясним, имеет ли уравнение другие корни.

Функция $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-7}+8$ убывает. Определим монотонность функции $y=\frac{(x-1)^2}{x-3}$ на луче $[5{,}3;+\infty)$. Если функция $y=\frac{(x-1)^2}{x-3}$ возрастает, то $x=7$ единственный корень уравнения.

Найдем производную функции $y=\frac{(x-1)^2}{x-3}$. Получим $y'=\frac{2(x-1)(x-3)-(x-1)^2}{(x-3)^2}=\frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$. Если $x\geq 5{,}3$, то $y'>0$, то есть функция $y=\frac{(x-1)^2}{x-3}$ возрастает на луче $[5{,}3;+\infty)$.

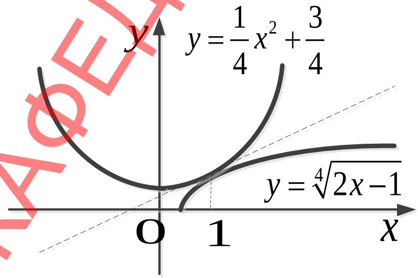
Таким образом, $x=7$ единственный корень уравнения.

Ответ: 7.

Пример 6. Решите уравнение $\sqrt[4]{2x-1}=\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}$.

Решение. Замечаем, что $x_1=1$ – корень уравнения. Выясним, имеет ли уравнение другие корни.

Найдем производные функций $y_1=\sqrt[4]{2x-1}$ и $y_2=\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}$ и вычислим их в точке $x=1$ (в точке пересечения графиков этих функций).



Имеем $y_1'=\frac{1}{4}(2x-1)^{-\frac{3}{4}}\cdot 2=\frac{1}{2\sqrt[4]{(2x-1)^3}}$, $y_1'(1)=\frac{1}{2}$; $y_2'=\frac{x}{2}$, $y_2'(1)=\frac{1}{2}$. Так как $y_1'(1)=y_2'(1)$, то графики

функций $y_1(x) = y_2(x)$ имеют общую касательную в точке $(1; 1)$. Функция $y_1(x)$ выпукла вниз, а функция $y_2(x)$ выпукла вверх, то их графики расположены по разные стороны от общей касательной, поэтому уравнение
$y_1(x) = y_2(x)$ имеет только один корень.
Итак, $x = 1$ - единственный корень уравнения

$$\sqrt[4]{2x-1} = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}.$$

Ответ: 1.

Пример 7. Докажите, что уравнение $e^x = ax^2 + bx + c$ может иметь не более трех различных решений.
Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(x) = e^x - ax^2 - bx - c.$$

Предположим, что эта функция имеет четыре различных корня. Поскольку $f(x)$ имеет производную всюду, то $f'(x)$ должна иметь не менее трех различных корней (по одному между любыми двумя корнями $f(x)$), то есть $f'(x) = e^x - 2ax - b$ обращается в нуль не менее трех раз. Тогда $f''(x) = e^x - 2ax$ имеет не менее двух нулей, а $f'''(x) = e^x$ имеет по крайней мере один нуль. Получили противоречие. Значит, уравнение может иметь не более трех различных решений.

Если при решении уравнения $f(x) = g(x)$ удается показать, что для всех x из некоторого множества M справедливы неравенства $f(x) \leq A$ и $g(x) \geq A$, то на множестве M уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе уравнений $\begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases}$.

Пример 8. Решите уравнение $\operatorname{tg}\frac{\pi}{x^2+4x+7} = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{sin\left(\pi+\frac{\pi x}{4}\right)}$.

Решение. Преобразуем выражение в левой части уравнения. Имеем $\operatorname{tg}\frac{\pi}{x^2+4x+7} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{(x+2)^2+3}$.

Так как $0 < \frac{\pi}{(x+2)^2+3} \leq \frac{\pi}{3}$, а на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{3}\right]$ функция $\operatorname{tg}x$ возрастает, то
$\operatorname{tg}0 < \operatorname{tg}\frac{\pi}{(x+2)^2+3} \leq \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$, то есть $0 < \operatorname{tg}\frac{\pi}{(x+2)^2+3} \leq \sqrt{3}$.

Значит, правая часть уравнения должна быть положительной. Так как $sin\left(\pi+\frac{\pi x}{4}\right) \leq 1$, получим:

$$\sqrt{3}\cdot\frac{1}{sin\left(\pi+\frac{\pi x}{4}\right)} \geq \sqrt{3}$$

Сопоставляя неравенства

$$0 < \operatorname{tg}\frac{\pi}{(x+2)^2+3} \leq \sqrt{3} \ \text{ и } \ \sqrt{3}\cdot\frac{1}{sin\left(\pi+\frac{\pi x}{4}\right)} \geq \sqrt{3},$$

приходим к системе

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{(x+2)^2+3} = \sqrt{3}, \\ \sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{sin\left(\pi+\frac{\pi x}{4}\right)} = \sqrt{3} \end{cases}$$

Первое уравнение системы обращается в верное равенство при $x=-2$. Поскольку это значение удовлетворяет и второму уравнению системы, то $x=-2$ – единственный корень исходного уравнения.

Ответ: - 2.

Пример 9. Решите уравнение $2\cdot\cos^2\frac{x^2+x}{6} = 2^x + 2^{-x}$.

Решение. Пусть $t = 2^x$. Тогда правая часть уравнения $2\cdot\cos^2\frac{x^2+x}{6} = 2^x + 2^{-x}$ примет вид $t+\frac{1}{t}$. Воспользуемся неравенством $t+\frac{1}{t} \geq 2$, если $t > 0$. При этом справедливо неравенство $2\cdot\cos^2\frac{x^2+x}{6} \leq 2$. Значит, заданное уравнение сводится к системе уравнений

$$\begin{cases} 2\cdot\cos^2\dfrac{x^2+x}{6} = 2, \\ 2^x + 2^{-x} = 2\ . \end{cases}$$

Из второго уравнения системы находим $x = 0$. Поскольку это значение удовлетворяет и первому уравнению системы, то $x = 0$ – решение системы, а следовательно и решение исходного уравнения $2\cdot\cos^2\frac{x^2+x}{6} = 2^x + 2^{-x}$.

Ответ: 0.

При решении уравнений и неравенств свойство ограниченности снизу или сверху функции на некотором множестве часто играет определяющую роль.

Например, если для всех x из некоторого множества M справедливы неравенства $f(x) > A$ и $g(x) < A$, где A – некоторое число, то на множестве M уравнение $f(x) = g(x)$ и неравенство $f(x) < g(x)$ решений не имеют.

Заметим, что роль числа A часто играет нуль, в этом случае говорят о сохранении знака функций $f(x)$ и $g(x)$ на множестве M.

Пример 10. Решите уравнение

$$\sin(x^3 + 2x^2 + 1) = x^2 + 2x + 3.$$

Решение. Для любого действительного числа x имеем
$\sin(x^3 + 2x^2 + 1) \le 1$, $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 \ge 2$.
Поскольку для любого значения x левая часть уравнения не превосходит единицы, а правая часть всегда не меньше двух, то данное уравнение не имеет решений.

Ответ: нет решений.

Пример 11. Решите неравенство $\frac{1-x}{1+x} < 2^x$.

Решение. ОДЗ неравенства – все действительные x, кроме $x = -1$. Разобьем ОДЗ на три множества: $-\infty < x < -1$, $-1 < x \le 0$, $0 < x < +\infty$ и рассмотрим неравенство $\frac{1-x}{1+x} < 2^x$ на каждом из этих промежутков.

Пусть $-\infty < x < -1$. Для каждого из этих x имеем $g(x) = \frac{1-x}{1+x} < 0$, а $f(x) = 2^x > 0$. Следовательно, все эти x являются решениями неравенства $\frac{1-x}{1+x} < 2^x$.

Пусть $-1 < x \le 0$. Для каждого из этих x имеем $g(x) = 1 - \frac{2x}{1+x} \ge 1$, а $f(x) = 2^x \le 1$. Следовательно, ни одно из этих x не является решением неравенства $\frac{1-x}{1+x} < 2^x$.

Пусть $0 < x < +\infty$. Для каждого из этих x имеем $g(x) = 1 - \frac{2x}{1+x} < 1$, а $f(x) = 2^x > 1$. Следовательно, все эти x являются решениями неравенства $\frac{1-x}{1+x} < 2^x$.

Ответ: $-\infty < x < -1, 0 < x < +\infty$.

При решении нестандартных уравнений бывает полезна следующая теорема.

Теорема. Если $y = f(x)$ – монотонно возрастающая функция, то уравнения $f(x) = x$ **(1)** и $f(f(x)) = x$ **(2)** эквивалентны.

Доказательство. То, что уравнение (2) является следствием уравнения (1), очевидно: любой корень $f(x) = x$ удовлетворяет $f(f(x)) = x$. (Если $f(x_0) = x_0$, то $f(f(x_0)) = x_0$.) Докажем, что любой корень уравнения (2) удовлетворяет уравнению (1). Пусть x_0 такое, что $f(f(x_0)) = x_0$. Предположим, что $f(x_0) \neq x_0$ и для определенности $f(x_0) > x_0$. Тогда $f(f(x_0)) > f(x_0) > x_0$, что противоречит предположению $f(f(x_0)) = x_0$. Теорема доказана.

Замечание. Если $y = f(x)$ монотонно возрастает, то при любом k уравнения $\underbrace{f\big(f(\ldots f(x)\ldots)\big)}_{k} = x$ и $f(x) = x$ эквивалентны.

Пример 12. Решите уравнение $\sqrt{1+\sqrt{x}} = x - 1$.

Решение. Перепишем уравнение: $1 + \sqrt{1+\sqrt{x}} = x$. Рассмотрим функцию $f(x) = 1 + \sqrt{x}$. Эта функция монотонно возрастает. Имеем уравнение $f\big(f(x)\big) = x$. В соответствии с теоремой заменяем его на эквивалентное уравнение $f(x) = x$ или

$1 + \sqrt{x} = x,\ x - \sqrt{x} - 1 = 0,\ \sqrt{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ,\ x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Пример 13. Решите уравнение $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$.

Решение. Преобразуем уравнение: $\frac{1+\left(\frac{x^3+1}{2}\right)^3}{2} = x$.

Данное уравнение имеет вид: $f\big(f(x)\big) = x$, где $f(x) = \frac{x^3+1}{2}$.

Согласно теореме имеем эквивалентное уравнение: $\frac{x^3+1}{2} = x$,

$x^3 - 2x + 1 = 0,\ (x-1)(x^2 + x - 1) = 0$, отсюда:

$x = 1, x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

Ответ: 1, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

5.2. Задачи для самостоятельного решения.

1. При каких значениях параметра a из интервала $(2;5)$ уравнение $\log_2\big|3-|\sin ax|\big| = \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right)$ имеет решения на отрезке $[2;3]$?

2. Решите уравнение $\sin x + 2\sin 2x = 4 + \sin 17x$.

3. Решите уравнение $x^2 - 6x + y - 4\sqrt{y} + 13 = 0$.

4. Решите уравнение $\sin^4 x + \cos^4 y + 2 = 4\sin x \cdot \cos y$.

5. Решите уравнение $\cos(x-y) - 2\sin x + 2\sin y = 3$.

6. Решите уравнение

$$\frac{|\mathrm{ctg}\, xy|}{\cos^2 xy} = \log_{\frac{1}{3}}\left(y^2 - 2y + \frac{10}{9}\right).$$

7. Решите неравенство $x - |y| - \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \geq 1$.

8. Решите неравенство

$$1 - \mathrm{tg}\frac{\pi x}{4} + \arccos(x + |\sin y|) \leq 0.$$

9. Решите уравнение $\cos 3x + \cos\frac{5}{2}x = 2$.

10. Решите уравнение $\log_{6-x}\log_2 x = \log_{7-x}\log_2(2x)$.

11. Решите уравнение $x\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{1+x^2}$.

12. Решите уравнение $x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4 = 0$.

13. Решите неравенство $20x^7 + 28x^5 + 210x - 35\sin 2x > 0$.

14. Решите неравенство $e^x > 1 + x$.

15. Решите уравнение $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} = 2$.

16. Решите неравенство $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$.

17.Найдите все пары вещественных чисел $(x;y)$, удовлетворяющих неравенству

$$\log_{\left(\left|\cos\frac{4x}{3}\right| + \left|\sin\frac{4x}{3}\right|\right)}\left(6 - \cos\frac{4y}{3} - 4\sin 6x\right) \leq \log_{(6^y + 4^{-y})}(|\sin y \cdot \cos 8x|).$$

18. Решите уравнение $2x \cdot \sin\frac{\pi x^2}{x^4+4} + \frac{x^2}{2} + 1 = 0$.

19. Решите уравнение $\cos 17x = 20\cos x$.

20. Решите неравенство $\sin x \leq \mathrm{tg}\, x \leq \mathrm{ctg}\, x \leq \cos x$.

21. Решите уравнение: $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots\cfrac{1}{1+\frac{1}{x}}}}=x$.

22. Решите уравнение $(16x^{200}+1)\cdot(y^{200}+1)=16(xy)^{100}$.

23. Решите уравнение

$$\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}+\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1+x^2}=4.$$

24. Решите уравнение $\sin x+2\sin 2x=3+\sin 3x$.

25. Доказать неравенство

$$\sqrt{5x+7}+\sqrt{13-5x}<\frac{13}{2},\text{ где } -\frac{7}{5}\le x\le\frac{13}{5}.$$

26. Докажите неравенство $\sin^2 x\cdot\cos^6 x\le\frac{27}{256}$.

27. Решите уравнение $x=2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2+\sqrt{x}}}}$,

где квадратный корень берется n раз $(n\ge 2)$.

28. Решите уравнение $x^3-6=\sqrt[3]{x+6}$.

29. Решите уравнение

$$4\cdot\log_4\left(6x^2+\frac{3}{8x^2}+13\right)=2\cos\left(\frac{5\pi}{14+\sin\pi x}\right)+7.$$

30. Решите неравенство $\sqrt{\sin^4 x+1}+\sqrt{\cos^4 x+1}\le\sqrt{5}$.

31. Решите систему

$$\begin{cases}\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2+5x+5}\ge 2\\ x^2+6x+5\le 0\end{cases}$$

32. Найдите все пары чисел $(x;y)$ удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases}4^{x+y-1}+3\cdot 4^{2y-1}\le 2\\ x+3y\ge 2-\log_4 3\end{cases}$$

33.Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases}\cos x_1=x_2\\ \cos x_2=x_3\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ \cos x_{n-1}=x_n\\ \cos x_n=x_1\end{cases}$$

34. Решите систему уравнений $\begin{cases}(x+y)^3=z,\\(y+z)^3=x,\\(z+x)^3=y.\end{cases}$

35. Решите систему уравнений $\begin{cases}x^3+y^3=z,\\y^3+z^3=x,\\z^3+x^3=y.\end{cases}$

36. Решите систему уравнений $\begin{cases}x+y^2=z^3,\\x^2+y^3=z^4,\\x^3+y^4=z^5.\end{cases}$

37. Решите систему уравнений $\begin{cases}x^5+xy^4=y^{10}+y^6,\\x^6+x^2=8y^3+2y.\end{cases}$

38. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases}x+y^2+z^4=0,\\y+z^2+x^4=0,\\z+x^2+y^4=0.\end{cases}$$

39. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x_1+\sqrt{x_2}=1,\\x_2+\sqrt{x_3}=1,\\\dots\dots\dots\dots\dots\dots.\\x_{24}+\sqrt{x_{25}}=1,\\x_{25}+\sqrt{x_1}=1.\end{cases}$$

40. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x+2y+3z+4t=10,\\\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}+\dfrac{4}{t}=10,\end{cases}$$

где $x>0,\ y>0, z>0,\ t>0$.

41. Решите систему $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\x+2y+2z\geq 3.\end{cases}$

42. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x+y+z=\sqrt{13},\\\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+4}+\sqrt{z^2+9}=7.\end{cases}$$

43. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + 2x^2 + 2x = y, \\ y^3 + 2y^2 + 2y = z, \\ z^3 + 2z^2 + 2z = x. \end{cases}$$

44. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0, \\ 2x^2 - 4x + y^3 + 3 = 0. \end{cases}$$

5.3. Решения, указания, ответы.

1. $\frac{9\pi}{13}; \frac{15\pi}{13}$. **Решение:** $\log_2|3 - |\sin ax|| \geq log_2 2 = 1$, а $\cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$. Значит, исходное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \log_2|3 - |\sin ax|| = 1, \\ \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} |\sin ax| = 1, \\ x = \frac{1}{6} + 2k. \end{cases}$$

Из чисел вида $\frac{1}{6} + 2k$ отрезку $[2; 3]$ принадлежит только $\frac{1}{6} + 2$, то есть $x = \frac{13}{6}$. При этом значении первое уравнение системы принимает вид $\left|\sin\frac{13a}{6}\right| = 1$, откуда $\frac{13a}{6} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $a = \frac{3\pi + 6\pi n}{13}$. Осталось среди этих значений отобрать те, которые принадлежат интервалу $(2; 5)$. Такими значениями будут $a_1 = \frac{9\pi}{13}$ (при $n = 1$) и $a_2 = \frac{15\pi}{13}$ (при $n = 2$).

Итак, условиям задачи удовлетворяют значения параметра a: $\frac{9\pi}{13}; \frac{15\pi}{13}$.

2. Нет решений. **Решение:** Так как $\sin x \leq 1$, $\sin 2x \leq 1$, то $\sin x + 2\sin 2x \leq 3$. Более того, $\sin x + 2\sin 2x < 3$. В самом деле, рассмотрим уравнение $\sin x + 2\sin 2x = 3$. Такое равенство может иметь место тогда, когда $\sin x = 1$ и $\sin 2x = 1$, что невозможно, так как $\sin x = 1$ при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, а при этих значениях имеем: $\sin 2x = \sin 2\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = \sin(\pi + 4\pi k) = 0$. Итак, $\sin x + 2\sin 2x < 3$. В то же время правая часть исходного уравнения удовлетворяет неравенству $4 + \sin 17x \geq$

3. Таким образом, можно сделать вывод, что уравнение $\sin x + 2\sin 2x = 4 + \sin 17x$ не имеет решений.

3.(3; 4). **Решение:** Преобразуем левую часть уравнения:

$$x^2 - 6x + y - 4\sqrt{y} + 13 = (x^2 - 6x + 9) + \left(y - 4\sqrt{y} + 4\right) =$$
$$= (x-3)^2 + \left(\sqrt{y} - 2\right)^2.$$

Значит, заданное уравнение можно записать в виде

$(x-3)^2 + \left(\sqrt{y}-2\right)^2 = 0$. Но сумма двух неотрицательных чисел равна нулю тогда, когда каждое из них равно нулю. Значит, $x = 3$, а $\sqrt{y} = 2$, $y = 4$. То есть (3; 4) – решение уравнения $x^2 - 6x + y - 4\sqrt{y} + 13 = 0$.

4. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, y = 2\pi n$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, y = \pi + 2\pi n$. **Решение:** Последовательно имеем:

$$(\sin^4 x - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 y + \cos^4 y) + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 y + 2 - 4\sin x\cos y = 0,$$
$$(\sin^2 x - \cos^2 y)^2 + 2(\sin x \cdot \cos y - 1)^2 = 0.$$

Получили сумму двух неотрицательных чисел равную нулю. Приходим к системе тригонометрических уравнений

$$\begin{cases}\sin^2 x = \cos^2 y,\\ \sin x \cdot \cos y = 1.\end{cases}$$

Положив $u = \sin x$, $v = \cos y$, получим систему $\begin{cases}u^2 = v^2,\\ u \cdot v = 1,\end{cases}$

откуда находим $\begin{cases}u_1 = 1,\\ v_1 = 1;\end{cases}$ $\begin{cases}u_2 = -1,\\ v_2 = -1,\end{cases}$

то есть $\begin{cases}\sin x = 1,\\ \cos y = 1;\end{cases}$ или $\begin{cases}\sin x = -1,\\ \cos y = -1.\end{cases}$

Из первой системы получим $\begin{cases}x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\\ y = 2\pi n,\end{cases}$

из второй $\begin{cases}x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\\ y = \pi + 2\pi n,\end{cases}$.

Это решения заданного уравнения.

5. $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi(k+n), y = \frac{\pi}{2} + 2\pi(k-n)$. **Решение:** Выполним преобразования: $-2(\sin x - \sin y) = (1 - \cos(x-y)) + 2$,

$-4\sin\frac{x-y}{2} \cdot \cos\frac{x+y}{2} = 2\sin^2\frac{x-y}{2} + 2$. Пусть $t = \sin\frac{x-y}{2}$, получим уравнение $t^2 + 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot t + 1 = 0$, которое рассмотрим как квадратное относительно t. Имеем:

$$t_{1,2} = -\cos\frac{x+y}{2} \pm \sqrt{\cos^2\frac{x+y}{2} - 1}.$$

Отсюда следует, что $\cos^2\frac{x+y}{2} - 1 \geq 0$. Так как, с другой стороны, $\cos^2\frac{x+y}{2} \leq 1$, то делаем вывод, что $\cos^2\frac{x+y}{2} = 1$, и тогда $t = -\cos\frac{x+y}{2}$.

Приходим к системе тригонометрических уравнений

$$\begin{cases} \cos^2\dfrac{x+y}{2} = 1, \\ \sin\dfrac{x-y}{2} = -\cos\dfrac{x+y}{2}. \end{cases}$$

Эта система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \cos\frac{x+y}{2} = 1, \\ \sin\frac{x-y}{2} = -1; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos\frac{x+y}{2} = -1, \\ \sin\frac{x-y}{2} = 1. \end{cases}$$

Из первой системы получаем:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} = 2\pi k, \\ \frac{x-y}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi(k+n), \\ y = \frac{\pi}{2} + 2\pi(k-n). \end{cases}$$

Из второй системы получаем:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} = \pi + 2\pi k, \\ \frac{x-y}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi(k+n), \\ y = \frac{\pi}{2} + 2\pi(k-n). \end{cases}$$

6. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. **Решение:** Так как $\frac{1}{\cos^2 xy} = 1 + \mathrm{tg}^2 xy$, а $y^2 - 2y + \frac{10}{9} = (y-1)^2 + \frac{1}{9}$, тогда перепишем уравнение в виде $\frac{1+\mathrm{tg}^2 xy}{|\mathrm{tg} xy|} = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{9} + (y-1)^2\right)$.

Покажем, что $\frac{1+\mathrm{tg}^2 xy}{|\mathrm{tg} xy|} \geq 2$. Перепишем неравенство в виде $\frac{1}{|\mathrm{tg} xy|} + |\mathrm{tg} xy| \geq 2$ и воспользуемся неравенством $t + \frac{1}{t} \geq 2$, если $t > 0$. В то же время $\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{9} + (y-1)^2\right) \leq 2$. В самом деле, $\frac{1}{9} + (y-1)^2 \geq \frac{1}{9}$, а (тогда в силу убывания функции $\log_{\frac{1}{3}} = t$) $\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{9} + (y-1)^2\right) \leq \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9} = 2$.

Левая часть уравнения $\frac{|\mathrm{ctg}xy|}{\cos^2 xy} = \log_{\frac{1}{3}}\left(y^2 - 2y + \frac{10}{9}\right)$ не меньше чем 2, а правая не больше чем 2, значит, каждая из них равна 2, то есть приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{1+\mathrm{tg}^2 xy}{|\mathrm{tg}xy|} = 2, \\ \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{9} + (y-1)^2\right) = 2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} |\mathrm{tg}xy| = 1, \\ (y-1)^2 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем $y = 1$. Тогда первое уравнение системы принимает вид $|\mathrm{tg}x| = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$.

7. $(1; 0)$. **Решение:** Преобразуем неравенство к виду

$x - |y| - 1 \geq \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ и возведем обе его части в квадрат, учтя при этом, что $x^2 + y^2 - 1 \geq 0$ (область определения) и $x - |y| - 1 \geq 0$ по смыслу неравенства

$x - |y| - 1 \geq \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$. Получим систему неравенств, равносильную преобразованному неравенству:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geq 0, \\ x - |y| - 1 \geq 0, \\ (x - |y| - 1)^2 \geq x^2 + y^2 - 1. \end{cases}$$

Из третьего неравенства последовательно получаем:

$$x^2 + y^2 + 1 - 2x \cdot |y| - 2x + 2|y| \geq x^2 + y^2 - 1,$$
$$1 - x - x \cdot |y| + |y| \geq 0, \ \ (1 + |y|)(1 - x) \geq 0.$$

Отсюда, в частности, следует, что $x \leq 1$. Поскольку из второго неравенства системы следует, что $x \geq 1$, то системе может удовлетворять значение $x = 1$.

При этом значении система неравенств принимает вид:

$$\begin{cases} y^2 \geq 0, \\ -|y| \geq 0, \\ y^2 \geq y^2, \end{cases}$$

что выполняется одновременно лишь при $y = 0$.

Итак, $(1; 0)$ – единственное решение неравенства

$x - |y| - \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \geq 1$.

8. $x = 1, y = \pi k$. **Решение:** Так как функция $u = \arccos t$ определена лишь для $t \in [-1; 1]$, то $-1 \leq x + |\sin y| \leq 1$, то есть $-1 - |\sin y| \leq x \leq 1 - |\sin y|$.

Так как $0 \leq |\sin y| \leq 1$, то из двойного неравенства

$-1-|\sin y| \le x \le 1-|\sin y|$ следует, что $-2 \le x \le 1$.
На промежутке $(-2;1]$ функция $v=\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}$ возрастает, значит, $v_{\text{наиб}}=v(1)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$, то есть на этом отрезке $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\le 1$, а значит, $1-\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\ge 0$. В то же время функция $u=\arccos t$ по определению принимает значения из отрезка $[0;\pi]$, то есть $\arccos(x+|\sin y|)\ge 0$.
Итак, в левой части неравенства
$1-\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}+\arccos(x+|\sin y|)\le 0$ содержится сумма двух неотрицательных выражений $1-\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}$ и $\arccos(x+|\sin y|)$. Значит, исходное неравенство может выполняться лишь тогда, когда каждое из указанных выражений обращается в нуль:

$$\begin{cases}1-\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}=0,\\ \arccos(x+|\sin y|)=0.\end{cases}$$

Решая эту систему, получаем: $\begin{cases}\frac{\pi x}{4}=\frac{\pi}{4}+\pi k,\\ x+|\sin y|=1;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=4k+1,\\ |\sin y|=-4k.\end{cases}$

Последнее уравнение имеет решения лишь при $k=0$. Значит, систему $\begin{cases}x=4k+1,\\ |\sin y|=-4k,\end{cases}$ можно переписать в виде $\begin{cases}x=1,\\ |\sin y|=0,\end{cases}$ откуда находим $\begin{cases}x=1,\\ y=\pi k.\end{cases}$ – решения неравенства
$1-\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}+\arccos(x+|\sin y|)\le 0$.

9. $x=4\pi l, l\in\mathbb{Z}$. **Решение:** Так как $\cos 3x\le 1, \cos\frac{5}{2}x\le 1$, то $\cos 3x+\cos\frac{5}{2}x\le 2$ для всех $x\in\mathbb{R}$. Тогда исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\cos 3x=1,\\ \cos\frac{5}{2}x=1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=2\pi k,\\ \frac{5}{2}x=2\pi n,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2\pi k}{3}\\ x=\dfrac{4\pi n}{5}\end{cases}, k,n\in\mathbb{Z}$$

Решения системы соответствуют случаю равенства

$$\begin{cases}\dfrac{2\pi k}{3}=\dfrac{4\pi n}{5}\\ k,n\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5k=6n\\ k,n\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Так как $5k$ и $6n$ - целые числа, то число $6n$ должно делиться на простое число 5, а это равносильно равенству $n = 5l, l \in \mathbb{Z}$. Тогда $k = 6l$ и $x = 4\pi l, l \in \mathbb{Z}$.

10. 4. **Решение:** Преобразуем уравнение:

$$\frac{\lg\log_2 x}{\lg(6-x)} = \frac{\lg(\log_2 x+1)}{\lg(7-x)}, \quad \frac{\lg(7-x)}{\lg(6-x)} = \frac{\lg(\log_2 x+1)}{\lg\log_2 x},$$

$$\log_{6-x}(7-x) = \log_{\log_2 x}(\log_2 x + 1).$$

Рассмотрим функцию $f(t) = \log_t(t+1)$.

Докажем, что при $t > 1$ эта функция монотонно убывает.

$$f(t) - 1 = \log_t(t+1) - 1 = \log_t\left(1 + \frac{1}{t}\right).$$

Получившаяся функция является убывающей (основание растет, под знаком логарифма функция убывает).

Уравнение имеет вид: $f(6-x) = f(\log_2 x)$, значит, $\log_2 x = 6 - x$. Слева функция возрастающая, справа убывающая, следовательно, решение единственно. Оно легко находится подбором: $x = 4$.

11. $1;\ 1+\sqrt{2}$.**Решение:** Воспользуемся неравенством

$$a_1a_2 + b_1b_2 \le \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}.$$

Геометрическая интерпретация этого неравенства: скалярное произведение двух векторов не превосходит произведения их длин. Равенство имеет место в случае коллинеарности векторов $(a_1; b_1); (a_2; b_2)$.

Имеем

$$x\sqrt{1+x} + 1\cdot\sqrt{3-x} \le \sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{(1+x)+(3-x)} = 2\sqrt{1+x^2}.$$

Значит, векторы $(x, 1)$ и $\left(\sqrt{1+x}, \sqrt{3-x}\right)$ коллинеарны, то есть $\frac{x}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$, $x\sqrt{3-x} = \sqrt{1+x}$, $x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$, $(x-1)(x^2-2x-1) = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1+\sqrt{2}, x_3 = 1-\sqrt{2}$.

Последний корень посторонний.

12. -1. **Решение:** Рассмотрим функцию $f(x) = x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4$. Область определения функции – промежуток $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$. Функция $f(x)$ непрерывна на этом промежутке и внутри его имеет производную $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + \frac{3}{\sqrt{1-3x}}$. Производная положительна внутри промежутка

$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$. Поэтому функция $f(x)$ возрастает на данном промежутке. Следовательно, она принимает каждое свое значение ровно в одной точке. Значит, исходное уравнение имеет не более одного корня. $x = -1$ является корнем уравнения $x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4 = 0$, других корней уравнение не имеет.

13. $0 < x < +\infty$. **Решение:** Рассмотрим функцию $f(x) = 20x^7 + 28x^5 + 210x - 35\sin 2x$. Функция имеет производную $f'(x) = 140x^6 + 140x^4 + 210 - 70\cos 2x$ на промежутке $(-\infty, +\infty)$. На этом промежутке производная положительна, функция возрастает и потому принимает каждое свое значение ровно в одной точке. Следовательно, уравнение $f(x) = 0$ может иметь не более одного корня. Таким корнем является $x = 0$. Так как функция $f(x)$ определена на всей прямой и непрерывна на ней, то для $x < 0$ имеем $f(x) < 0$, а при $x > 0$ имеем $f(x) > 0$. Поэтому решением неравенства $20x^7 + 28x^5 + 210x - 35\sin 2x > 0$ являются все x из промежутка $(0, +\infty)$.

14. $0 < x < +\infty$, $-\infty < x \leq 0$. **Решение:** ОДЗ неравенства – промежуток $(-\infty, +\infty)$. Рассмотрим функцию $f(x) = e^x - 1 - x$. Функция на промежутке $(-\infty, +\infty)$ имеет производную $f'(x) = e^x - 1$. $f'(x) > 0$ для любых x из промежутка $0 < x < +\infty$. Так как на промежутке $0 \leq x < +\infty$ функция $f(x)$ непрерывна, то это означает, что на промежутке $0 \leq x < +\infty$ функция $f(x)$ возрастает. Поскольку $f(0) = 0$, то $f(x) > 0$ для любого $x \in (0, +\infty)$. Поэтому любое $x \in (0, +\infty)$ является решением неравенства. Так как $f'(x) < 0$ для любого $x \in (-\infty, 0)$ и $f(x)$ непрерывна на промежутке $-\infty < x \leq 0$, то функция $f(x)$ убывает $-\infty < x \leq 0$. Поскольку $f(0) = 0$, то $f(x) > 0$ для любого $x \in (-\infty, 0)$. Следовательно, любое $x \in (-\infty, 0)$ является решением неравенства. Поскольку $f(0) = 0$, то $x = 0$ не является решением неравенства $e^x > 1 + x$. Таким образом, решения исходного неравенства – промежутки $(0, +\infty)$ и $(-\infty, 0)$.

15. $x = 3$. **Решение:** ОДЗ уравнения – промежуток $2 \leq x \leq 4$. Функция $f(x) = \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x}$ непрерывна на отрезке $[2,4]$

и имеет производную $f'(x)=\frac{1}{4}(x-2)^{-3/4}-\frac{1}{4}(4-x)^{-3/4}$, которая обращается в нуль при $x=3$. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[2,4]$, то ее наибольшее и наименьшее значения находятся среди чисел $f(3), f(2)$ и $f(4)$. Так как $f(3)=2$,
$f(2)=f(4)=\sqrt[4]{2}<2$, то наибольшее значение $f(x)$ есть $f(3)=2$. Следовательно, уравнение $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}=2$ имеет единственный корень $x=3$.

16. $0<x<+\infty$. **Решение.** ОДЗ неравенства – промежуток $(-1,+\infty)$. Рассмотрим функцию $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$.
Эта функция на промежутке $(-1,+\infty)$ имеет производную $f'(x)=\frac{x^2}{1+x}$, которая обращается в нуль в точке $x=0$. Рассмотрим функцию $f(x)$ сначала на промежутке $(-1{,}0]$. Так как $f(x)$ непрерывна на данном промежутке и для любой точки x внутри промежутка $f'(x)>0$, то $f(x)$ возрастает на $(-1{,}0]$. Так как $f(0)=0$, то $f(x)<0$ для любого x внутри промежутка $(-1{,}0]$, то есть ни одно x из промежутка $(-1{,}0]$ не является решением неравенства.
На промежутке $[0,+\infty)$ функция $f(x)$ непрерывна, для любой точки x внутри данного промежутка $f'(x)>0$, поэтому $f(x)$ возрастает на $[0,+\infty)$. Так как $f(0)=0$, то $f(x)<0$ для любого x внутри промежутка $[0,+\infty)$, то есть любое x из промежутка $(0,+\infty)$ - решение неравенства $\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$.

17. $y=\frac{3\pi}{2}+3\pi k,\ x=\frac{7\pi}{4}+3\pi m$ или $x=\frac{11\pi}{4}+3\pi m,\ k,m\in\mathbb{Z}$.
Решение: Так как при всех x и y выполнены неравенства $\left|\cos\frac{4x}{3}\right|+\left|\sin\frac{4x}{3}\right|\geq 1$, $6-\cos\frac{4y}{3}-4\sin 6x\geq 1$, $6^y+4^{-y}>1$, $|\sin y\cdot\cos 8x|\leq 1$, то левая часть неравенства неотрицательна, а правая, неположительна. Следовательно, неравенство эквивалентно равенству нулю обеих его частей, то есть $6-\cos\frac{4y}{3}-4\sin 6x=1$, $|\sin y\cdot\cos 8x|=1$ при условии $\left|\cos\frac{4x}{3}\right|+\left|\sin\frac{4x}{3}\right|\geq 1$, то есть $2\cos\frac{4x}{3}\cdot\sin\frac{4x}{3}=\sin\frac{8x}{3}\neq 0$.

Равенство $6-\cos\frac{4y}{3}-4\sin 6x=1$ эквивалентно $\cos\frac{4y}{3}=1$ и $\sin 6x=1$. Равенство $|\sin y\cdot\cos 8x|=1$ эквивалентно

$|\sin y|=1$ и $|\cos 8x|=1$. Из $\cos\frac{4y}{3}=1$ получаем $\frac{4y}{3}=2\pi k$, то есть $y=\frac{3\pi k}{2}$. Из $|\sin y|=1$ получаем $y=\frac{\pi}{2}+\pi m=\frac{3\pi k}{2}, k,m\in\mathbb{Z}$. Следовательно, $3k=1+2m$ и $k=1+2(m-k)=1+2n, n\in\mathbb{Z}$, $y=\frac{3\pi}{2}+3\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ является решением. Далее, из $\sin 6x=1$, $6x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, то есть $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}$. Из $|\cos 8x|=1$ получаем $8x=\pi m=\frac{2\pi}{3}+\frac{8\pi k}{3},\ k,m\in\mathbb{Z}$. Следовательно, $8k=3m-2$, то есть $k=3(3k-m)+2=3l+2,\ l\in\mathbb{Z}$, и $x=\frac{3\pi}{4}+\pi l, l\in\mathbb{Z}$. Далее, равенство $\sin\frac{8x}{3}=0$ означает $\frac{8x}{3}=\pi r, r\in\mathbb{Z}$. Следовательно, $6\pi+8\pi l=3\pi r$, то есть $l=3(3l-r+2)=3s,\ s\in\mathbb{Z}$. Таким образом, при $l=3s+1$ или $l=3s+2$ значения $x=\frac{3\pi}{4}+\pi l$ являются решениями, то есть $x=\frac{7\pi}{4}+3\pi s$ или $x=\frac{11\pi}{4}+3\pi s, s\in\mathbb{Z}$ – решения.

18. $-\sqrt{2}$.*Указание.* Рассмотрите уравнение как квадратное относительно x и используйте оценку $0\le\frac{x^2}{x^4+4}\le\frac{1}{4}$.

19. $y=\pi k, x=\frac{\pi}{2}-\pi k, k\in\mathbb{Z}$. **Решение:** Пусть $x=\frac{\pi}{2}-y$, тогда $\cos x=\sin y$, $\cos 17x=\sin\left(\frac{17\pi}{2}-17y\right)=\sin 17y$. Значит, $\sin 17y=20\sin y$. Легко видеть, $|\sin ny|\le n|\sin y|$ что при натуральных n. Это неравенство доказывается по индукции: при $n=1$ оно очевидно, а далее

$|\sin(n+1)y|=|\sin ny\cdot\cos y+\sin y\cdot\cos ny|\le|\sin ny|+$
$+|\sin y|\le(n+1)|\sin y|$ по индукционному предположению.
Так что равенство выполняется только при $\sin y=0$, то есть
$y=\pi k, x=\frac{\pi}{2}-\pi k, k\in\mathbb{Z}$.

20. нет решений. Из условия следует, что $-1\le\mathrm{tg}x\le\mathrm{ctg}x\le 1$. $\mathrm{ctg}x=\frac{1}{\mathrm{tg}x}$, поэтому либо $|\mathrm{tg}x|$, либо $|\mathrm{ctg}x|$ не меньше 1. Тогда, если неравенство выполнено, то либо $\mathrm{tg}x=\mathrm{ctg}x=1$, либо

$\mathrm{tg}x = \mathrm{ctg}x = -1$. Но в обоих этих случаях $|\sin x| = |\cos x| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и неравенство, данное в условии, не выполняется. Значит, у него нет решений.

21. $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. При любом n рассматриваемое уравнение – квадратное, следовательно, имеет не более двух корней. Покажем, что при любом n оно имеет одни и те же корни. При $k = 1$ уравнение $1 + \frac{1}{x} = x$ имеет корни: $x_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. Пусть при $k = n - 1$ корни уравнения те же. Тогда в равенстве $1 + \frac{1}{x} = x$ можно число в знаменателе заменить выражением, содержащим $n - 1$ знак дроби, следовательно, при $k = n$ уравнение имеет те же корни.

22. $x = \pm \frac{1}{\sqrt[50]{2}}$, $y = \pm 1$. **Решение:** Используя неравенство Коши $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$, можно записать $16x^{200} + 1 \geq 2\sqrt{16x^{200}} = 8x^{100}$ и $y^{200} + 1 \geq 2\sqrt{y^{200}} = 2y^{100}$, то есть имеет место неравенство $(16x^{200} + 1) \cdot (y^{200} + 1) \geq 16 \cdot (xy)^{100}$.
Отсюда и из уравнения следует, что приведенные выше неравенства Коши обращаются в равенства. А это возможно лишь в том случае, когда $16x^{200} = 1$ и $y^{200} = 1$. Следовательно, имеем $x = \pm \frac{1}{\sqrt[50]{2}}$ и $y = \pm 1$.

23. 0. **Решение:** Воспользуемся неравенством Бернулли $(1 + x)^p \leq 1 + px$, тогда левую часть уравнения можно записать в виде

$$(1 - x)^{\frac{1}{2}} + (1 + x)^{\frac{1}{2}} + (1 - x^2)^{\frac{1}{4}} + (1 + x^2)^{\frac{1}{4}} \leq 1 - \frac{x}{2} + 1 + \frac{x}{2} + 1 - \frac{x^2}{4} + 1 + \frac{x^2}{4} = 4.$$

Если полученное неравенство сравнить с исходным уравнением, то видно, что неравенство Бернулли обратится в равенство, в том случае, когда $x = 0$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $x_1 = 0$ – корень уравнения

$$\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x} + \sqrt[4]{1 - x^2} + \sqrt[4]{1 + x^2} = 4.$$

24. корней нет. **Решение:** Преобразуем уравнение $\sin x + 2\sin 2x = 3 + \sin 3x$ следующим образом:

$\sin x + \sin 2x + \sin 2x - \sin 3x = 3,$

$2\sin\frac{3}{2}x \cdot \cos\frac{x}{2} + 2\cos\frac{5}{2}x \cdot \sin\left(-\frac{x}{2}\right) = 3,$

$\sin\frac{3}{2}x \cdot \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{5}{2}x \cdot \sin\frac{x}{2} = \frac{3}{2}.$

Оценим левую часть последнего уравнения, используя для этого неравенство Коши – Буняковского $(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots +$ *xnyn2≤x12+x22+…+xn2y12+y22+…+yn2, (n≥2).* Имеет место $\left(\sin\frac{3}{2}x \cdot \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{5}{2}x \cdot \sin\frac{x}{2}\right)^2 \leq$

$$\leq \left(\sin^2\frac{3}{2}x + \cos^2\frac{5}{2}x\right) \cdot \left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right) \leq 2 \cdot 1 = 2.$$

Отсюда следует, что $\sin\frac{3}{2}x \cdot \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{5}{2}x \cdot \sin\frac{x}{2} \leq \sqrt{2}$. Так как $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$, то уравнение $\sin\frac{3}{2}x \cdot \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{5}{2}x \cdot \sin\frac{x}{2} = \frac{3}{2}$, а следовательно и исходное уравнение, корней не имеет.

25. Доказательство. Так как $5x + 7 \geq 0$ и $13 - 5x \geq 0$, то условие $-\frac{7}{5} \leq x \leq \frac{13}{5}$ является областью допустимых значений переменной в неравенстве. Для оценки сверху левой части исходного неравенства воспользуемся неравенством Коши – Буняковского. В таком случае имеет место

$$\left(\sqrt{5x+7} + \sqrt{13-5x}\right)^2 = \left(1 \cdot \sqrt{5x+7} + 1 \cdot \sqrt{13-5x}\right)^2 \leq$$

$$\leq (1^2 + 1^2) \cdot (5x + 7 + 13 - 5x) = 40 < 42{,}25 = \left(\frac{13}{2}\right)^2.$$

Отсюда следует справедливость исходного неравенства.

26. Доказательство. Нетрудно показать, что исходное неравенство равносильно неравенству $\sqrt[4]{3\sin^2 x \cdot \cos^6 x} \leq \frac{3}{4}$, для доказательства которого будем использовать неравенство Коши при $n = 4$. Имеет место

$\sqrt[4]{3\sin^2 x \cdot \cos^6 x} = \sqrt[4]{3\sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos^2 x} \leq$

$\leq \frac{3\sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 x + \cos^2 x}{4} = \frac{3}{4}.$

27. $x_1 = 4$. **Решение:** Из уравнения следует, что $x \geq 2$. Введем функцию $f(x) = 2 + \sqrt{x}$. Тогда уравнение принимает вид функционального уравнения $f\left(f\left(\dots\left(f(x)\right)\dots\right)\right) = x$. Так как функция $f(x)=2+\sqrt{x}$ возрастает при $x\geq 0$, то уравнение равносильно уравнению $x=f(x)$, то есть исходное уравнение равносильно уравнению $x=2+\sqrt{x}$, которое имеет единственный положительный корень $x_1=4$.

28. $x_1=2$. **Решение:** Уравнение равносильно уравнению $x=\sqrt[3]{\sqrt[3]{x+6}+6}$. **(***)** Пусть $f(x)=\sqrt[3]{x+6}$, тогда уравнение принимает вид $f(f(x))=x$. Поскольку функция $y=f(x)$ возрастает на всей числовой оси OX, то уравнение $f(f(x))=x$ равносильно уравнению $f(x)=x$, то есть уравнение **(***)** равносильно уравнению $\sqrt[3]{x+6}=x$ или $x^3-x-6=0$.

Так как $x^3-x-6=(x-2)(x^2+2x+3)$ и $x^2+2x+3>0$, то уравнение $x^3-x-6=0$ имеет единственный корень $x_1=2$.

29. $x_1=\frac{1}{2}$. **Решение:** Первоначально оценим снизу левую часть уравнения, применяя для этого неравенство Коши при $n=6$. Так как $6x^2+\frac{3}{8x^2}=2x^2+2x^2+2x^2+\frac{1}{8x^2}+\frac{1}{8x^2}+\frac{1}{8x^2}\geq$

$$\geq 6\cdot\sqrt[6]{2x^2\cdot 2x^2\cdot 2x^2\cdot\frac{1}{8x^2}\cdot\frac{1}{8x^2}\cdot\frac{1}{8x^2}}=6\cdot\frac{1}{2}=3,$$

то $6x^2+\frac{3}{8x^2}+13\geq 16$ или $4\cdot\log_4\left(6x^2+\frac{3}{8x^2}+13\right)\geq 8$.

Далее, оценим сверху правую часть уравнения. Поскольку $-1\leq\sin\pi x\leq 1$, то $\frac{\pi}{3}\leq\frac{5\pi}{14+\sin\pi x}\leq\frac{5\pi}{13}$. Известно, что функция $y=\cos x$ на отрезке $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ является непрерывно убывающей и поэтому $\cos\left(\frac{5\pi}{14+\sin\pi x}\right)\leq\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$. В этой связи $2\cos\left(\frac{5\pi}{14+\sin\pi x}\right)+7\leq 8$. Следовательно, равенство в уравнении достигается только в том случае, когда обе его части равны 8. А это означает, что примененное выше неравенство Коши обращается в равенство и, кроме того, $\sin\pi x=1$.

Таким образом, имеем систему уравнений $\begin{cases}2x^2=\frac{1}{8x^2},\\ \sin\pi x=1.\end{cases}$

Из первого уравнения системы получаем $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$. Однако $x_1 = \frac{1}{2}$ только удовлетворяет второму уравнению полученной системы.

30. $x_1 = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, где k– целое число. **Решение:** Введем в рассмотрение три вектора $\bar{a}(\sin^2 x; 1), \bar{b}(\cos^2 x; 1)$ и $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$. Тогда $|\bar{a}| = \sqrt{\sin^4 x + 1}$, $|\bar{b}| = \sqrt{\cos^4 x + 1}$,
$|\bar{c}| = \sqrt{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{5}$ и неравенство треугольника принимает вид $\sqrt{\sin^4 x + 1} + \sqrt{\cos^4 x + 1} \geq \sqrt{5}$. Отсюда и из исходного неравенства получаем равенство $\sqrt{\sin^4 x + 1} + \sqrt{\cos^4 x + 1} = \sqrt{5}$, из которого следует, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарные.

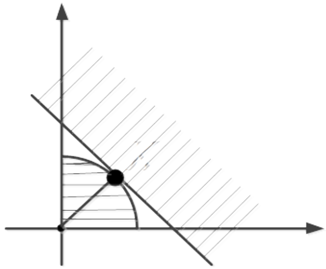
Следовательно, имеет место $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1$ или $\operatorname{tg} x = \pm 1$. Корнями последнего уравнения является $x_1 = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, где k– целое число.

31. -1. **Решение:** Пусть $\sqrt{x+2} = a \geq 0$; $\sqrt{x^2 + 5x + 5} = b \geq 0$. Тогда после замены система примет вид: $\begin{cases} a + b \geq 2, \\ a^2 + b^2 \leq 2 \end{cases}$

Считая, что $a \geq 0$ и $b \geq 0$ независимые переменные, изобразим на координатной плоскости Oab геометрическое место точек $M(a, b)$, координаты которых удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} a + b \geq 2, \\ a^2 + b^2 \leq 2, \\ a \geq 0, \\ b \geq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Множество точек, удовлетворяющих системе (1) изображено на



рисунке.

Пересечение множеств – точка $K(1{,}1)$.

Система (1) имеет единственное решение

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sqrt{x+2} = 1 \\ \sqrt{x^2+5x+5} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

32. $x = \frac{1+\log_4 3}{2}$, $y = \frac{1-\log_4 3}{2}$. **Решение:** В силу монотонного возрастания функции $z = 4^t$, второе неравенство системы равносильно неравенству:

$$3 \geq 4^{-(x+3y-2)} \Leftrightarrow 4^{x+y-1} \cdot 3 \cdot 4^{2y-1} \geq 1.$$

Пусть $4^{x+y-1} = u > 0;\ 3 \cdot 4^{2y-1} = v > 0.$

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} u + v \leq 2, \\ u \cdot v \geq 1, \\ u > 0, \\ v > 0 \end{cases}$$

Используя неравенства $u + v \geq 2\sqrt{u \cdot v}$ и $u \cdot v \geq 1$, первое неравенство системы можно записать следующим образом: $2 \geq u + v \geq 2\sqrt{u \cdot v} \geq 2$

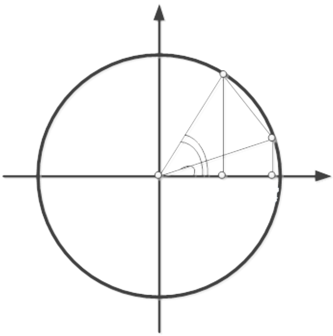
Неравенства выполняются, если каждое из них являются равенствами:

$$\begin{cases} u + v = 2, \\ u \cdot v = 1, \\ u = v. \end{cases} \Leftrightarrow \ u = v = 1.$$

Переходя к исходным переменным, получаем:

$$\begin{cases} 4^{x+y-1} = 1, \\ 3 \cdot 4^{2y-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ 2y - 1 = \log_4 \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \log_4 3}{2}, \\ y = \frac{1 - \log_4 3}{2} \end{cases}$$

33. система уравнений имеет единственное решение. **Решение:** Докажем, что $|\cos z - \cos t| \le |z - t|$, причем знак равенства имеет место лишь при $z = t$.



Из рисунка видим, что $|\cos z - \cos t| = |AB|$, а $|z - t|$ равняется длине дуги CD. Отсюда следует наше утверждение.

Вычтя из первого уравнения второе, получим

$$\cos x_1 - \cos x_2 = x_2 - x_3.$$

Отсюда, воспользовавшись только что доказанным утверждением, получим $|x_1 - x_2| \ge |x_2 - x_3|$. Аналогично выписываем $|x_2 - x_3| \ge |x_3 - x_4| \ge \dots \ge |x_{n-1} - x_n| \ge |x_n - x_1| \ge |x_1 - x_2|$. Последнее неравенство получается из рассмотрения разности последнего и первого уравнений. Значит, всюду должны стоять знаки равенства. Но по ранее доказанному это может быть лишь при $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = x_n$. Осталось заметить, что уравнение $\cos x = x$ имеет единственное решение. Отсюда и система уравнений имеет единственное решение.

34. $(0; 0; 0)$, $x = y = z = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$. *Указание.* Докажите, что $x = y = z$. **35.** $(0; 0; 0)$, $x = y = z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

36. $(0; 0; 0)$; $(0; 1; 1)$; $(1; 0; 1)$; $(-1; 0; -1)$; $(-1; -1; 0)$; $\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}; \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}; \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)$. *Указание.* Перемножьте первое и третье уравнения и возведите в квадрат второе. Приравняйте левые части полученных уравнений. После упрощения получится соотношение $xy^2(x - y)^2 = 0$.

37. $(0; 0)$; $(\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{2})$. *Указание.* Решение $(0; 0)$, при $y = 0$, очевидно. Пусть теперь $y \ne 0$. Разделив обе части первого уравнения на y^5, получим систему, равносильную данной при $y \neq 0$ $\begin{cases} \left(\frac{x}{y}\right)^5 + \frac{x}{y} = y^5 + y, \\ (x^2)^3 + x^2 = (2y)^3 + 2y. \end{cases}$

Пусть $f(t) = t^5 + t; g(t) = t^3 + t$. Обе функции – возрастающие, поэтому последняя система равносильна системе: $\begin{cases} \frac{x}{y} = y, \\ x^2 = 2y. \end{cases}$

38. 2 решения. **Решение:** Очевидно решение $x = y = z$. Пусть x, y, z – ненулевое решение системы, тогда обязательно $x < 0,\ y < 0,\ z < 0$. Пусть (для определенности) $x \leq y \leq z < 0$. Тогда $x^2 \geq y^2 \geq z^2$ и $x^4 \geq y^4 \geq z^4$. При этом $x + y^2 + z^4 \leq z + x^2 + y^4 = 0$. Поэтому если не все числа x, y, z равны между собой, то $x + y^2 + z^4 < 0$. Отсюда следует, что $x = y = z < 0$. Уравнение же $x^4 + x^2 + x = 0$, то есть (при $x \neq 0$) $x^3 + x + 1 = 0$, имеет единственный отрицательный корень.

39. $x_1 = x_2 = \cdots = x_{25} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. *Указание.* Очевидно, что $0 < x_i < 1$ при $i = 1,2, \dots, 25$. Для доказательства равенства чисел $x_1, \dots, x_{25}$ убедитесь в том, что числа $x_2, x_4, \dots, x_{24}$, а также числа $x_1, x_3, \dots, x_{25}$ образуют строго монотонные последовательности, если $0 < x_1 < 1$. Поэтому все числа $x_1, x_2, \dots, x_{25}$ равны.

40. $x_1 = 1,\ y_1 = 1,\ z_1 = 1,\ t_1 = 1$. **Решение:** Если сложить левые и правые части обоих уравнений исходной системы, то получим $\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 \cdot \left(y + \frac{1}{y}\right) + 3 \cdot \left(z + \frac{1}{z}\right) + 4 \cdot \left(t + \frac{1}{t}\right) = 20.$ **(*)**

Поскольку $x > 0,\ y > 0, z > 0,\ t > 0$, то можно воспользоваться неравенством Коши. Тогда

$x + \frac{1}{x} \geq 2,\ y + \frac{1}{y} \geq 2,\ z + \frac{1}{z} \geq 2,\ t + \frac{1}{t} \geq 2$. **(**)**

Отсюда получаем неравенство

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 \cdot \left(y + \frac{1}{y}\right) + 3 \cdot \left(z + \frac{1}{z}\right) + 4 \cdot \left(t + \frac{1}{t}\right) \geq 20.$$

Если полученное неравенство сравнить с уравнением **(*)**, то видно, что все неравенства **(**)** превращаются в равенства, а это означает, что $x = y = z = t = 1$.

41. $x_1=\frac{1}{3},\ y_1=\frac{2}{3},\ z_1=\frac{2}{3}$. **Решение:** Используя неравенство Коши – Буняковского, получаем $(x+2y+2z)^2\le(1^2+2^2+2^2)\cdot(x^2+y^2+z^2)=9$. Отсюда следует, что $x+2y+2z\le 3$. С учетом неравенства из системы получаем равенство $x+2y+2z=3$. Другими словами, примененное выше неравенство Коши – Буняковского обратилось в равенство, а это означает, что существует константа a такая, что $x=a, y=2a$ и $z=2a$. Отсюда и из равенства $x+2y+2z=3$ получаем уравнение относительно переменной a вида $a+2(2a)+2(2a)=9a=3$, то есть $a=\frac{1}{3}$. Следовательно, получаем $x_1=\frac{1}{3}$ и $y_1=z_1=\frac{2}{3}$. Непосредственной подстановкой в уравнение исходной системы убеждаемся, что найденные значения x,y,z являются ее корнями.

42. $x_1=\frac{\sqrt{13}}{6}, y_1=\frac{\sqrt{13}}{3}, z_1=\frac{\sqrt{13}}{2}$. **Решение:** Пусть $\bar{a}(x;1)$, $\bar{b}(y;2)$, $\bar{c}(z;3)$ и $\bar{s}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$. Тогда, с учетом первого уравнения системы имеем $\bar{s}(\sqrt{13};6)$ и $|\bar{s}|=\sqrt{13+36}=7$. Так как при этом $|\bar{a}|=\sqrt{x^2+1}, |\bar{b}|=\sqrt{y^2+4}$ и $|\bar{c}|=\sqrt{z^2+9}$, то из второго уравнения системы следует равенство $|\bar{a}|+|\bar{b}|+|\bar{c}|=|\bar{s}|$, где $\bar{s}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$. Из равенства $|\bar{a}|+|\bar{b}|+|\bar{c}|=|\bar{s}|$ следует, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ и $\bar{s}$ являются коллинеарными, то есть $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}=\frac{\sqrt{13}}{6}$. Отсюда получаем $x_1=\frac{\sqrt{13}}{6}, y_1=\frac{\sqrt{13}}{3}, z_1=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

43. $(0,0,0),(-1,-1,-1)$. **Решение:** Рассмотрим функцию $f(t)=t^3+2t^2+2t$. Поскольку $f'(t)=3t^2+4t+2>0$ при всех t, то $f(t)$ возрастает.Система имеет вид $y=f(x)$, $z=f(y)$, $x=f(z)$, то есть $x=f\left(f\left(f(x)\right)\right)$.

Согласно теореме x удовлетворяет уравнению $f(x)=x$ или

$$x^3+2x^2+2x=x, x(x^2+2x+1)=0, x(x+1)^2=0.$$

44. $x_1=1, y_1=-1$. **Решение:** Из первого уравнения системы получаем уравнение $y^2=\frac{2x}{x^2+1}$. Так как $(x-1)^2\ge 0$ или $x^2+1\ge 2x$, то $y^2=\frac{2x}{x^2+1}\le 1$ или $-1\le y\le 1$.

Представим второе уравнение системы в виде

$2(x-1)^2+(y^3+1)=0.$ **(∗∗∗∗)**

Поскольку $-1 \le y \le 1$, то $y^3+1 \ge 0$. Так как при этом $(x-1)^2 \ge 0$, то из уравнения **(∗∗∗∗)** получаем $\begin{cases} x-1=0, \\ y^3+1=0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=-1. \end{cases}$ Непосредственной подстановкой в первое уравнение исходной системы убеждаемся, что эта пара значений x_1 и y_1 является корнем этой системы.

Библиографический список

1. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып.1. - М.: Просвещение, 2008. - 192 с.
2. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып.2. - М.: Просвещение, 2009. - 159 с.
3. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математические олимпиады Московской области. – М.: Физматкнига, 2006. – 320 с.
4. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып.3. - М.: Просвещение, 2011. - 207 с.
5. Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. - М.: Наука, 1975.-111 с.
6. Блинков А.Д., Горская Е.С., Гуровиц В.М. Московские математические регаты.- М.: МЦНМО, 2007. - 360 с.
7. Васильев Н.Б., Егоров А.А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. – М.:Наука, 1988. – 288 с.
8. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В., Ленинградские математические кружки. – Киров: Аса, 1994. – 272 с.
9. Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. – М.:МЦНМО,2005.–560с.
10. Иванов О.А. Элементарная математика для школьников, студентов и преподавателей. - М.: МЦНМО, 2009. - 384 с.

11. Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи / под ред. В.О. Бугаенко. – М.: МЦНМО, 2004. – 96 с.
12. Кольман Э., Зих О. Занимательная логика.- М.:Наука, 1966. - 127 с.
13. Кутасов А.Д., Пиголкина Т.С.и др. Пособие по математике для поступающих в вузы / под ред. Г.Н. Яковлева.- М.:Наука, 1988.-720 с.
14. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия.- М.:Просвещение, 1991.-352 с.
15. Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Нестандартные методы решения уравнений и неравенств. - М.: Издательство МГУ, 1991.- 144 с.
16. Под ред. А.А. Заславского, Скопенкова А.Б. и др. Математика в задачах. -М.: МЦНМО,2009.- 488 с.
17. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. – М.: МЦНМО, 2006. – 168 с.
18. Прасолов В.В., Шарыгин И. Ф. Задачи по стереометрии. – М.: Наука, 1989. – 288 с.
19. Савин А.П. и др. Физико-математические олимпиады. Сборник. – М.: Знание,1977. –160 с.
20. Супрун В.П. Математика для старшеклассников. - М.: Издательство ЛКИ, 2008.-200с.
21. Тарасов В.В., Елкина Н.В. Дискретная математика. Ч.1:учеб.пособие. РГРТУ.- Рязань, 2009. - 92 с.
22. Ткачук В.В. Математика - абитуриенту. - М.: МЦНМО, 2008.- 1024 с.
23. Фарков А.В. Готовимся к олимпиадам по математике.- М.: Экзамен, 2007.- 157 с.

24. Цыпкин А.Г., Пинский А.И. Справочник по методам решения задач по математике для средней школы . - М.: Наука, 1989. - 576 с.
25. Шарыгин И.Ф., Голубев В.И. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. Пособие для 11 кл.сред.шк.-М.:Просвещение, 1991.

С ю с ю к а л о в Андрей Иванович
С ю с ю к а л о в а Елена Александровна

Избранные нестандартные задачи по математике

Часть 1

Учебное пособие

Редактор М.Е. Цветкова
Корректор С.В. Макушина
Н/К
Подписано в печать 19.11.2012. Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага ксероксная. Печать ризографическая.
Объем 6,74 усл. печ. л. Тираж 100 экз. Заказ №1396. Цена договорная

Издательство Рязанский института развития образования.
390023, Рязань, ул. Урицкого, д. 2а.

Отпечатано в научно-методическом отделе
Рязанского института развития образования.
390023, Рязань, ул. Урицкого, д. 2а.