УДК 629.735.3.03

А.М. Абрамов, Л.А. Баранов, В.В. Бондарцев, А.А. Бордуков, С.В. Никитин, Т.Г. Токмакова

АЛГОРИТМ КОРРЕКЦИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ ЦИФРОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ СИСТЕМЫ БОРТОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ АНАЛИЗЕ ПОЛЁТНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Летные испытания авиационной техники представляют всесторонние натурные эксперименты, в процессе которых осуществляются измерения практически всех параметров, а сами измерения можно отнести к динамическим измерениям.

Оценка динамических погрешностей при лётных испытаниях представляет собой довольно сложную техническую задачу. При этом значительно сложнее обстоят дела с оценкой динамических характеристик и погрешностей цифровых преобразователей, поскольку они проявляются как реакция устройства на скорость (частоту) изменения входного сигнала и во многом зависят от принципа действия и структуры используемого АЦП, ЦФ, мультиплексора и их инерционных свойств.

В статье приведён алгоритм коррекции динамической погрешности цифровых преобразователей, а также показано, как последовательно определить переходные и импульсные характеристики измерительного канала (ИК), аппроксимировать его выходной отклик и скорректировать динамическую погрешность.

Ключевые слова: *динамические погрешности, системы бортовых измерений, цифровые преобразователи, аппроксимация, переходные функции.*

Введение. Система бортовых измерений (СБИ) представляет собой по архитектуре автоматизированную многоканальную информационно-измерительную систему (ИИС) на базе бортового компьютера для съема, преобразования, регистрации, обработки, хранения и визуализации измерительной информации. Источниками полетной информации являются, прежде всего, электрические сигналы, поступающие с разнообразных датчиков различных физических величин (пьезоэлектрический, пьезорезистивный, индуктивный, тензорезистивный, терморезисторный, термоанемометрический и др.) и изменяющиеся в широких амплитудном и частотном диапазонах. Безусловно, рассматривая последовательное преобразование любой физической величины в код, обработку цифровых отсчетов, передачу цифрового потока информации и измерение уже дискретных значений, можно уверенно сказать, что основную долю в суммарную погрешность всегда вносят аналоговые функциональные блоки, такие как первичный преобразователь (датчик), нормализатор (масштабирующий усилитель), аналоговый фильтр. А далее по степени убывания погрешности от АЦП, ЦФ к мультиплексору.

При кардинальном переходе от аналогового сигнала к его цифровому виду возникает, как правило, две погрешности квантования и дискретизации, сопровождающиеся потерей полезной информации между цифровыми отсчетами.

Оценка динамических погрешностей представляет собой довольно сложную, техническую задачу. При этом значительно сложнее обстоят дела с оценкой динамических характеристик и погрешностей цифровых преобразователей, поскольку они проявляются как реакция устройства на скорость (частоту) изменения входного сигнала и во многом зависят от принципа действия и структуры используемого АЦП, ЦФ, мультиплексора и их инерционных свойств.

Цель работы – разработать алгоритм коррекции динамической погрешности цифровых преобразователей.

Теоретическая часть. Измеряемая величина $x(t)$ (вибрация, ускорение, деформация …) датчиком преобразуется в электрическую величину. Входной преобразователь согласует сигнал датчика и усиливает его до необходимого уровня. ФНЧ ограничивает спектр сигнала, поступающего на вход АЦП, для исключения эффекта наложения спектров, возникающего от дискретизации при аналого-цифровом преобразовании. На рисунке 1 представлена функциональная схема входной части одного из измерительных канала СБИ.

При изменении во времени измеряемой величины $x(t)$ из-за инерционности рассмотренных звеньев возникает динамическая погрешность.

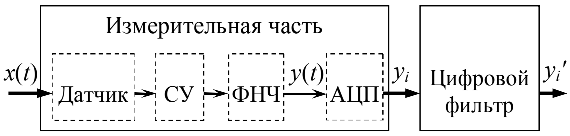

Рисунок 1 – Функциональная схема входной части СБИ

Для сравнения входной $x(t)$ и выходной $y(t)$ величин измерительной части между собой сделаем их приведение «к выходу» и запишем значение динамической погрешности $\delta(t)$ в виде [1]

$$\delta(t_n) = y_n - Kx(t_n), \qquad (1)$$

где K – статический передаточный коэффициент, который находится в статических условиях работы измерительного устройства как отношение приращения выходной величины Δy к приращению входной величины Δx:

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (2)$$

Для уменьшения динамической погрешности был разработан алгоритм для цифрового фильтра, корректирующего динамические характеристики измерительной части, представленный на рисунке 2.

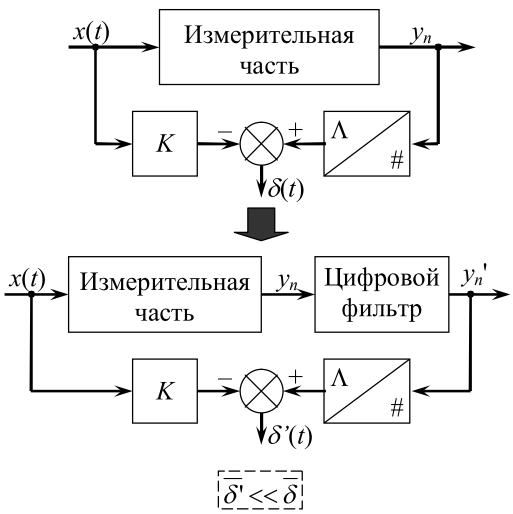

Рисунок 2 – Уменьшение динамической погрешности

На рисунке блок $\#/\Lambda$ осуществляет восстановление аналогового сигнала из цифровых отсчетов.

Измерительная часть состоит из аналоговых блоков и АЦП, но в дальнейшем мы будем её рассматривать как единый аналоговый блок. Такое допущение справедливо, если частота дискретизации АЦП во много выше частоты спектра сигнала, подаваемого на его вход. В случае минимизации динамической погрешности во временной области (корректировка переходных процессов) будем описывать измерительную часть, используя импульсную $g(t)$ или переходную $h(t)$ характеристики, в частотной области (корректировка полосы пропускания) будем использовать передаточную функцию $G(p)$.

Уравнение связи между входным и выходным сигналами измерительной части в динамическом режиме можно представить через интегральное уравнение типа свертки

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) g(t-\tau) d\tau . \qquad (3)$$

Скорректировать динамические погрешности означает определить по выходному сигналу $y(t)$ входной сигнал $x(t)$. Формально это означает решить интегральное уравнение (3).

С точки зрения математики задача (3) является некорректно поставленной [2-4], т.к. решение может: а) не существовать, б) быть не единственным, в) быть неустойчивым (когда небольшие погрешности во входных данных вызывают резкое изменение решения). Не вдаваясь в математические подробности, рассмотрим эти «некорректности».

а) В нашем практическом случае мы уверены в существовании сигнала $x(t)$, т.е. решения уравнения (3), при наличии отклика на выходе измерительной части $y(t)$. Отсутствие решения может объясняться только неадекватной математической моделью устройства.

б) Неоднозначные решения уравнения (3) могут возникнуть из-за наличия нулей в амплитудно-частотной характеристике (АЧХ) устройства, причем нули лежат в частотном спектре входного сигнала. Тогда добавление во входной сигнал $x(t)$ гармоник с частотами, равными частотам нулей АЧХ, не вызовет изменение в отклике $y(t)$. Таким образом, решение уравнения (3) оказывается не единственным. Проектировать входную часть СБИ необходимо так, чтобы АЧХ всех составляющих измерительной части (рисунок 1) не имели нулей в полосе частот входного сигнала $x(t)$. На практике именно так и делают, исключая неоднозначность решения.

в) На практике определение выходного сигнала происходит с погрешностью измерения и дальнейшие вычисления ведутся с функцией

$$\tilde{y}(t)=y(t)+\varepsilon(t), \qquad (4)$$

где $\varepsilon(t)$ – погрешность измерения. Покажем, что сколько угодно малой погрешности $\varepsilon(t)$ может соответствовать ненулевая погрешность восстановления сигнала.

Найдем Фурье-преобразование выражения (4)

$$\tilde{Y}(\omega)=Y(\omega)+\mathrm{E}(\omega), \qquad (5)$$

здесь $\tilde{Y}(\omega), Y(\omega)$ и $\mathrm{E}(\omega)$ – Фурье-образы функций $\tilde{y}(t)$, $y(t)$ и $\varepsilon(t)$ соответственно.

Найдем Фурье-образ входного сигнала

$$\tilde{X}(\omega)=\frac{\tilde{Y}(\omega)}{G(\omega)}=\frac{Y(\omega)}{G(\omega)}+\frac{E(\omega)}{G(\omega)}, \qquad (6)$$

где $\tilde{X}(\omega)$ – преобразования Фурье функции $\tilde{x}(t)$, восстановленной из выходного отклика $\tilde{y}(t)$, $G(\omega)$ – передаточная функция устройства. Преобразуем (6) к следующему виду:

$$\tilde{X}(\omega)=X(\omega)+\frac{E(\omega)}{G(\omega)}. \qquad (7)$$

Применим к уравнению (7) обратное преобразование Фурье

$$\tilde{x}(t)=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{E(\omega)}{G(\omega)}e^{j\omega t}d\omega\right)$$
$$=x(t)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{E(\omega)}{G(\omega)}e^{j\omega t}d\omega. \qquad (8)$$

Интеграл в правой части представляет собой ошибку $\varepsilon_{вх}(t)$ восстановления входного сигнала. Так как погрешность измерения $\varepsilon_{вх}(t)$ случайная величина, то и $E(\omega)$ случайна. Полагая, что $\varepsilon_{вх}(t)$ имеет нулевое математическое ожидание ($M\left[\varepsilon_{вх}(t)\right]=0$), и учитывая равенство Парсеваля, запишем дисперсию погрешности восстановленного сигнала:

$$D_{\varepsilon}=\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon_{вх}(t)^{2}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|E(\omega)|^{2}}{|G(\omega)|^{2}}d\omega. \qquad (9)$$

Передаточные функции реальных устройств стремятся к нулю при $\omega\to\infty$, в нашем случае это тем более справедливо, так как $G(\omega)$ имеет частную характеристику ФНЧ (рисунок 1). В частотном спектре помехи может присутствовать составляющая со спектром белого шума, не убывающая с ростом частоты. Поэтому в подынтегральном выражении при $\omega\to\infty$ происходит деление конечной величины на величину, стремящуюся к нулю, и дисперсия получается бесконечной.

Не обязательно для того, чтобы получить большую дисперсию погрешности, в помехе должна присутствовать компонента белого шума, достаточно чтобы спектр помехи убывал медленнее передаточной функции. Неустойчивость решения уравнения (3) объясняется наличием высокочастотных составляющих в помехе.

Для «стабилизации» решения нужно подавить высокочастотные составляющие при измерении отклика $y(t)$ или, как говорят, провести регуляризацию решения. При проведении регуляризации важно не потерять полезные высокочастотные составляющие в восстанавливаемом сигнале $x(t)$.

Аппроксимация переходной, импульсной характеристик измерительной части и выходного отклика.

Решение задачи коррекции динамической погрешности требует определения импульсной характеристики $g(t)$ измерительной части. Для нахождения $g(t)$ на вход исследуемого устройства подается дельта-функция Дирака и регистрируется реакция. На практике проще найти переходную характеристику $h(t)$, т.к. в качестве испытательного сигнала на вход измерительной части подается сигнал в виде единичного скачка $1(t)$, имеющего, в отличие от дельта-функции, конечную амплитуду. Определив переходную, несложно вычислить и импульсную характеристику:

$$g(t)=\frac{d}{dt}h(t). \qquad (10)$$

Подав на вход измерительной части тестовый единичный скачок $1(t)$, регистрируем отклик на выходе измерительной части в виде массива цифровых отсчетов y_n. Частота дискретизации АЦП выбрана постоянной, поэтому отсчеты y_n, измеренные в моменты времени t_n, расположены через равные интервалы Δt.

Поскольку переходные и импульсные характеристики линейных электрических и механических устройств описываются с помощью экспоненциальных функций с вещественными и комплексными показателями, то естественно выбрать их в качестве основы аппроксимирующих полиномов. При таком выборе будет достигаться минимум погрешности аппроксимации при фиксированном количестве членов полинома.

Интерполяция. Запишем переходную функцию в виде экспоненциального полинома:

$$h(t)=\sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{p_n t}\ , \tag{11}$$

где c_n и p_n – неизвестные постоянные.

Задача интерполяция заключается в том, чтобы построить экспоненциальный полином, принимающий в точках $t_0 \ldots t_{N-1}$ значения $y_0 \cdots y_{N-1}$.

Для решения задачи составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_N \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_{N+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{N-1} & y_N & \cdots & y_{2N-1} \\ 1 & m & \ldots & m^N \end{vmatrix} = 0\,. \tag{12}$$

Найдя корни уравнения (12), из равенства $m_n = e^{p_n \Delta t}$ можно определить первые N неизвестных:

$$p_n = \frac{1}{\Delta t}\ln\left(m_n\right). \tag{13}$$

Оставшиеся неизвестные определим из системы уравнений

$$\begin{pmatrix} \tilde{n}_0 & \tilde{n}_1 & \ldots & c_{N-1} \\ c_0 m_0 & c_1 m_1 & \ldots & c_{N-1} m_{N-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_0 m_0^{N-1} & c_1 m_1^{N-1} & \ldots & c_{N-1} m_{N-1}^{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \ldots \\ y_{N-1} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Окончательный результат получим, подставив вычисленные значения $p_0 \ldots p_{N-1}$ и $c_0 \ldots c_{N-1}$ в выражение (11). Импульсную характеристику получим, продифференцировав (11):

$$g(t)=\sum_{n=0}^{N-1} c_n p_n e^{p_n t}. \tag{15}$$

Среднеквадратическое приближение. В случае когда отсчеты y_n содержат в себе заметную составляющую случайной помехи или когда количество отсчетов y_n превышает количество неизвестных постоянных в экспоненциальном полиноме (15), для аппроксимации целесообразно использовать метод наименьших квадратов (МНК). МНК оказывает «сглаживающее» действие и поэтому устойчив к помехам.

Выше рассматривался вопрос устойчивости решения уравнения (3) и было показано, что для получения устойчивого решения необходима фильтрация высокочастотных составляющих отклика $y(t)$. Поэтому МНК целесообразно применять, аппроксимируя отклик $y(t)$ по отсчетам y_n, и дальнейшие вычисления для коррекции динамической погрешности вести с экспоненциальным полиномом.

В МНК минимизируется сумма квадратов невязок, т.е.:

$$\Phi(c_n, p_n)=\sum_{k}^{M}\left(y_k-\sum_{n=1}^{N} c_n e^{p_n t_k}\right)^2 \to \min\,. \tag{16}$$

Условием минимума (15) является обращение в нуль частных производных (16) по $p_0 \ldots p_{N-1}$ и по $c_0 \ldots c_{N-1}$. Выполнив дифференцирование и приравняв результат к нулю, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(c_n, p_n)}{\partial c_n} &= 2\sum_{k}^{M} e^{p_n t_k}\left(y_k-\sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{p_n t_k}\right)=0\,, \\ \frac{\partial \Phi(c_n, p_n)}{\partial p_n} &= 2\sum_{k}^{M} c_n t_k e^{p_n t_k}\left(y_k-\sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{p_n t_k}\right)=0 \end{aligned} \tag{17}$$

После несложных преобразований (17) получим систему уравнений.

Для исключения путаницы между коэффициентами аппроксимирующих полиномов импульсной (или переходной) характеристики и отклика $y(t)$ переименуем постоянные c_n и p_n. Для выходного сигнала $y(t)$ коэффициент c_n переименуем в d_n, а p_n в s_n. С учетом последнего запишем функцию отклика в виде экспоненциального полинома:

$$y(t)=\sum_{n=0}^{N-1} d_n e^{s_n t}\ , \tag{18}$$

где постоянные d_n и s_n – решения системы уравнений (17) с учетом переименования ($c_n \to d_n$, $p_n \to s_n$).

Метод решения.

Для определения входного сигнала $x(t)$ необходимо решить уравнение (3).

Стандартный метод решения подобного уравнения основан на преобразовании Фурье:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt\,. \tag{19}$$

Применив это преобразование к обеим частям уравнения (3), получим:

$$Y(\omega)=X(\omega)\,G(\omega)\,, \tag{20}$$

где $Y(\omega)$, $X(\omega)$ и $G(\omega)$ – преобразования Фурье функций $y(t)$, $x(t)$ и $g(t)$ соответственно.

Заметим, что класс функций, при котором интеграл (19) сходится, достаточно ограничен (не существует Фурье-преобразования от многих элементарных функций). В нашем случае класс решений (19) можно расширить, если учесть что из-за физической реализуемости все используемые нами временные функции $x(t)$, $y(t)$ и $g(t)$ при $t<0$ равны нулю. Тогда нижний предел интегрирования в (20) можно приравнять к нулю. Также, сделав в выражении (20) замену $j\omega = p$, перейдем от преобразования Фурье к преобразованию Лапласа:

$$F(p)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt. \tag{21}$$

Выражение (20) примет вид

$$Y(p)=X(p)G(p). \tag{22}$$

Далее из (20) имеем

$$X(p)=\frac{Y(p)}{G(p)}. \tag{23}$$

Применение к полученному выражению обратного преобразования Лапласа дает решение задачи:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\xi-\infty}^{\xi+\infty}\frac{Y(p)}{G(p)}e^{pt}dp. \tag{24}$$

Выше, при выборе функции для аппроксимирующего полинома, учитывалось существование аналитических решений для интегралов (21) и (24). Найдем эти решения. Преобразования Лапласа от импульсной характеристики (15) и выходного отклика (18) равны:

$$G(p)=L\{g(t)\}=L\left\{\sum_{n=0}^{N-1}c_n p_n e^{p_n t}\right\}=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{c_n p_n}{p+p_n} \tag{25}$$

$$Y(p)=L\{y(t)\}=L\left\{\sum_{n=0}^{M-1}d_n e^{s_n t}\right\}=\sum_{n=0}^{M-1}\frac{d_n}{p+s_n} \tag{26}$$

соответственно. Здесь количество членов аппроксимирующего полинома у импульсной характеристики равно N, а у входного отклика – M.

Подставив (25) и (26) в выражение (23), получим

$$X(p)=\frac{\sum\limits_{n=0}^{N1-1}\frac{c_n p_n}{p+s_n}}{\sum\limits_{n=0}^{N2-1}\frac{d_n}{p+p_n}}. \tag{27}$$

Избавление от «многоэтажности» в выражении (27) дает

$$X(p)=\frac{b_M p^M + b_{M-1}p^{M-1}+...+b_1 p+b_0}{a_N p^N + a_{N-1}p^{N-1}+...+a_1 p+a_0}, \tag{28}$$

где $a_0 \dots a_N$ и $b_0 \dots b_N$ – постоянные вычисленные после упрощения выражения (27).

Для нахождения инверсного преобразования Лапласа от (28) не обязательно пользоваться формулой (24). Методика поиска оригинала от дробно-рациональной функции хорошо известна и здесь подробно рассматриваться не будет. Скажем лишь, что дробь (28) разлагают на элементарные дроби вида

$$\frac{A}{p+\alpha}, \tag{29}$$

$$\frac{Bp+C}{p^2+\beta p+\gamma}. \tag{30}$$

Дробям (29) и (30) будут соответствовать оригиналы:

$$L^{-1}\left\{\frac{A}{p+\alpha}\right\}=Ae^{-\alpha t}, \tag{31}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{Bp+C}{p^2+\beta p+\gamma}\right\}= = e^{-\delta t}\left(B\cos(\omega t)+\frac{C-B\delta}{\omega}\sin(\omega t)\right), \tag{32}$$

где $\delta=\dfrac{\beta}{2}$ и $\omega=\sqrt{\gamma-\delta^2}$.

Таким образом, окончательное решение задачи будет состоять из суммы слагаемых вида (31) и (32):

$$x(t)=\sum_{n=0}^{n1}A_n e^{-\alpha_n t}+ +\sum_{n=0}^{n2}e^{-\delta_n t}\left(B_n\cos(\omega_n t)+\frac{C_n-B_n\delta_n}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\right). \tag{33}$$

Алгоритм коррекции динамической погрешности.

Опираясь на вышеприведенный материал, опишем последовательность действий для компенсации динамической погрешности.

1. *Определение переходной и импульсной характеристик измерительной части.*

Этот пункт выполняется до эксплуатации СБИ, во время ее настройки. Предполагается, что определение характеристик производится в «лабораторных» условиях, с малым уровнем помех. Поэтому в выходных отсчетах y_n составляющая случайной помехи мала. В противном случае определение переходной и импульсной характеристик необходимо производить по алгоритму, изложенному в пункте 2, т.к. этот алгоритм имеет «сглаживающие» свойства:

а) необходимо на вход измерительной части (на датчик, рисунок 1) подать воздействие в виде единичного скачка и зарегистрировать на выходе отклик — массив цифровых отсчетов $y_0 \dots y_{N-1}$;

б) подставить полученные отсчеты в характеристическое уравнение (12). Решив его, найдем корни $y_0 \dots y_{N-1}$;

в) вычислить показатели экспонент $p_0 \dots p_{N-1}$, для этого найденные в предыдущем пункте корни по очереди подставить в выражение (13);

г) используя $m_0 \dots m_{N-1}$ и $y_0 \dots y_{N-1}$, составить систему уравнений (14) и решить ее, найдя постоянные $c_0 \dots c_{N-1}$.

Найденные в пп. «б» и «в» значения $p_0 \dots p_{N-1}$ и $c_0 \dots c_{N-1}$ являются коэффициентами полинома (15), аппроксимирующего импульсную характеристику измерительной части $g(t)$.

2. *Аппроксимация выходного отклика измерительной части.*

а) зарегистрировать выходные отсчеты (отклик на измеряемый входной сигнал $x(t)$) $y_0 \dots y_{N-1}$;

б) подставив значения $y_0 \dots y_{N-1}$ в систему уравнений (17) и решив ее с учетом переименования $c_n \to d_n$, $p_n \to s_n$, найдем постоянные $s_0 \dots s_{N-1}$ и $d_0 \dots d_{N-1}$.

Найденные значения $s_0 \dots s_{N-1}$ и $d_0 \dots d_{N-1}$ являются коэффициентами экспоненциального полинома (18), аппроксимирующего выходной отклик измерительной части на сигнал $x(t)$.

3. *Получение окончательного решения задачи — сигнала со скорректированной динамической погрешностью:*

а) с помощью рассчитанных в пп. 1,б, 1,в, и 2,б значений $p_0 \dots p_{N-1}$, $m_0 \dots m_{N-1}$, $s_0 \dots s_{N-1}$ и $d_0 \dots d_{N-1}$ вычислить коэффициенты $a_0 \dots a_N$ и $b_0 \dots b_M$ дробно-рациональной функции (28);

б) используя коэффициенты $a_0 \dots a_N$ и $b_0 \dots b_M$, через разложение рациональной дроби (28) на элементарные дроби вида (29) и (30) рассчитать постоянные $A_0 \dots A_{n1}$, $\alpha_0 \dots \alpha_{n1}$, $\delta_0 \dots \delta_{n2}$, $B_0 \dots B_{n2}$, $\omega_0 \dots \omega_{n2}$ и $C_0 \dots C_{n2}$;

в) используя постоянные, рассчитанные в предыдущем пункте, получить окончательный результат вида (33).

Заключение. В статье предложено практическое решение по коррекции динамической погрешности цифровых преобразователей, т.е. минимизации суммарной погрешности между входным и выходным сигналами измерительной части в динамическом режиме.

Показано, как последовательно, в соответствии с разработанным алгоритмом, определить переходную и импульсную характеристики ИК, аппроксимировать его выходной отклик и скорректировать динамическую погрешность.

Библиографический список

1. *Грановский В.А.* Динамические измерения: Основы метрологического обеспечения. Л.: Энергоатомиздат, 1984. 224 с.

2. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.

3. *Тихонов А.Н. и др.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 229 с.

4. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с.