

УДК 621.3.018.51

*А.В. Бакке, И.В. Лукашин*

## УСОВЕРШЕНСТВОВАННЫЙ АЛГОРИТМ ВРЕМЕННОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДРОБНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

*Исследуются возможности применения дробного преобразования Фурье к решению задачи временной синхронизации сигналов. Показана целесообразность применения этого преобразования для идентификации временного рассогласования при приеме полифазных последовательностей Задова-Чу. Предложен новый алгоритм оценки временного положения синхросимвола на основе последовательности Задова-Чу с использованием дробного преобразования Фурье. Приводятся результаты имитационного моделирования разработанного алгоритма синхронизации для многолучевой модели беспроводного канала связи, подтверждающие преимущество предложенного алгоритма временной синхронизации.*

**Ключевые слова:** дробное преобразование Фурье, CAZAC сигналы, последовательности Задова-Чу, OFDM, временная синхронизация, многолучевое распространение.

**Введение.** Идея дробного преобразования Фурье (Fractional Fourier Transform, FrFT) возникла в математической литературе более 80 лет назад и впоследствии нашла широкое применение в квантовой физике и оптике. Дробное преобразование Фурье представляет собой математическое обобщение обычного преобразования Фурье, которое является частным случаем FrFT при повороте частотно-временной плоскости на  $90^\circ$ . В радиотехнических приложениях особое внимание к этому преобразованию возникло в начале 90-х годов в области радиолокации при обработке сигналов с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ). Связанное с поворотом частотно-временной плоскости на произвольный угол это преобразование стало эффективным инструментом при решении задач обнаружения и оценки параметров сигналов с ЛЧМ, а также в задачах фильтрации сигналов на фоне помех. Особую эффективность FrFT позволяет получить в классе сигналов с линейным изменением частоты, поскольку обеспечивает существенную локализацию спектра таких сигналов, практически неизменную при частотно-временных рассогласованиях.

В этих условиях представляется перспективным применение FrFT для обработки полифазных последовательностей Задова-Чу (Zadoff-Chu) [1, 2], получивших широкое применение при решении задач временной и частотной синхронизации в современных телекоммуникационных системах [3]. Высокое качество функционирования алгоритмов синхронизации, использующих последовательности Задова-Чу, обусловлено основным свойством этих последова-

тельностью: периодическая автокорреляционная функция (АКФ) таких сигналов не содержит боковых выбросов, а аperiodическая АКФ характеризуется их минимальным уровнем. Последовательности, обладающие таким свойством, образуют обширный класс CAZAC (Constant Amplitude Zero AutoCorrelation) сигналов.

Существует множество решений частотной и временной синхронизации, основанных на применении CAZAC сигналов [4, 5]. Как правило, реализация методов синхронизации предполагает определение взаимной корреляционной функции (ВКФ) двух и более синхронизирующих символов (синхросимвол), сформированных из последовательностей Задова-Чу. Обобщенный процесс временной и частотной синхронизации с использованием синхронизирующих символов состоит из следующих этапов:

1) обнаружение и грубая оценка временного положения (Symbol Time Offset, STO) сигнала на основе вычисления ВКФ принимаемых синхросимволов;

2) оценка частотного рассогласования (Carrier Frequency Offset, CFO) и его компенсация;

3) точное оценивание временного положения синхросимволов на основании ВКФ принимаемого и опорных сигналов.

При этом существенное влияние на качество точной оценки временного положения синхросимволов оказывают сложные условия приема, связанные с нестационарностью канала связи и с многолучевым распространением радиосигналов.

**Цель работы** – исследование эффективности выполнения временной синхронизации с исполь-

зованием дробного преобразования Фурье для последовательности Задова-Чу при приеме сигналов в условиях многолучевого распространения.

**Основные свойства дробного преобразования Фурье.** Дробное преобразование Фурье порядка  $a$  для произвольного угла  $\varphi = a \frac{\pi}{2}$  определяется следующим выражением [6]:

$$X_a(u) = F_a \{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) K_a(t, u) dt, \quad (1)$$

где  $F_a$  – линейный оператор преобразования FrFT;  $K_a(t, u)$  – ядро преобразования:

$$K_a(t, u) = \sqrt{\frac{1 - j \operatorname{ctg}(\varphi)}{2\pi}} \exp\left(j \frac{t^2 + u^2}{2} \times \operatorname{ctg}(\varphi) - j \frac{ut}{\sin(\varphi)}\right). \quad (2)$$

В соответствии с (2) выражение для прямого FrFT может быть записано в виде:

$$X_a(u) = \sqrt{\frac{1 - j \operatorname{ctg}(\varphi)}{2\pi}} \exp\left(j \frac{u^2}{2} \operatorname{ctg}(\varphi)\right) \times \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp\left(j \frac{t^2}{2} \operatorname{ctg}(\varphi)\right) \exp\left(j \frac{ut}{\sin(\varphi)}\right) dt. \quad (3)$$

Выражение (3) представляет собой преобразование Фурье с масштабирующим коэффициентом  $1/\sin(\varphi)$  от произведения функции  $x(t)$  на компоненту с ЛЧМ  $\exp\left(j \frac{t^2}{2} \operatorname{ctg}(\varphi)\right)$  и взвешенное множителем  $\sqrt{\frac{1 - j \operatorname{ctg}(\varphi)}{2\pi}} \exp\left(j \frac{u^2}{2} \operatorname{ctg}(\varphi)\right)$ .

Параметр преобразования  $\varphi$  можно рассматривать как угол поворота частотно-временной плоскости, определенный в интервале  $[-\pi, \pi]$ , что соответствует порядку преобразования  $a \in [-2, 2]$ . В частном случае, когда  $\varphi = 0$  ( $a = 0$ ) или кратно  $2\pi$ , результат преобразования  $F_0\{x(t)\} = x(t)$ ; если  $\varphi = \pi/2$  ( $a = 1$ ), то оператор  $F_1\{x(t)\}$  соответствует прямому преобразованию Фурье, а при  $\varphi = -\pi/2$  ( $a = -1$ )  $F_{-1}\{X_a(u)\}$  – обратному преобразованию Фурье. Для всех остальных значений  $\varphi \in [-\pi, \pi]$  какое-либо соответствие между FrFT и обычным преобразованием Фурье отсутствует.

Дробное преобразование Фурье обладает рядом интересных свойств [7], актуальных при решении задач временной и частотной синхронизации. К ним относятся следующие свойства FrFT:

1) сдвиг сигнала во временной области

$$F_a \{x(t - \tau)\} = X_a(u - \tau \cos \varphi) \times \exp\left(j \left(\frac{\tau^2 \sin \varphi \cos \varphi}{2} - u \tau \sin \varphi\right)\right), \quad (4)$$

$$\times \exp\left(j \left(\frac{\tau^2 \sin \varphi \cos \varphi}{2} - u \tau \sin \varphi\right)\right),$$

2) смещение сигнала в частотной области

$$F_a \{x(t) \exp(j \varepsilon t)\} = X_a(u - \varepsilon \sin \varphi) \times \exp\left(j \left(-\frac{\varepsilon^2 \sin \varphi \cos \varphi}{2} + u \varepsilon \cos \varphi\right)\right). \quad (5)$$

Если  $x(t)$  является функцией с ЛЧМ, то для  $F_a\{x(t)\}$  существует оптимальный порядок преобразования  $a$ , при котором модуль отклика FrFT имеет форму одиночного выброса максимальной амплитуды. Величина оптимального значения  $a_{opt} = \frac{2}{\pi} \varphi_{opt}$  определяется параметрами ЛЧМ, а также зависит от разрешающей способности преобразования по частоте и во времени [8]. Иллюстрация этого свойства FrFT для сигналов с ЛЧМ представлена на рисунке 1.

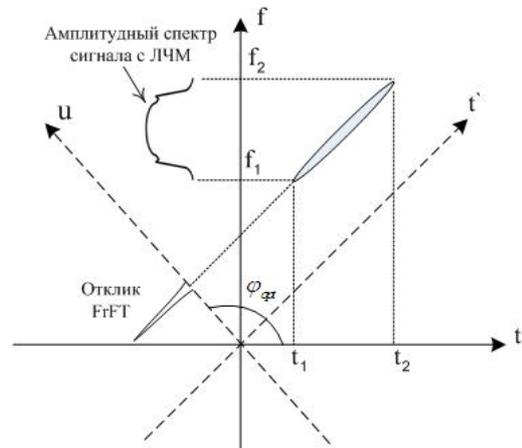


Рисунок 1 – Иллюстрация оптимального значения угла  $\varphi$  для FrFT от сигнала с ЛЧМ

**Алгоритм временной синхронизации с применением дробного преобразования Фурье для последовательностей Задова-Чу.** Согласно [9] модифицированная последовательность Задова-Чу может быть определена следующим образом:

для четных значений  $N$

$$c_k(n) = \exp\left(j \frac{\pi k n^2}{N}\right) \quad (6)$$

и для нечетных  $N$

$$c_k(n) = \exp\left(j \frac{2\pi k n(n+1)}{N}\right), \quad (7)$$

где  $n = \overline{0, N-1}$ ;  $k$  – индекс последовательности, далее принимается  $k = 1$  и  $c(n) = c_1(n)$ .

Нетрудно заметить, что последовательности  $c(n)$ , определяемые в соответствии (6) и (7), являются частным случаем дискретной формы представления сигналов с ЛЧМ. Следовательно, дискретное преобразование FrFT от  $c(n)$ , обозначаемое далее оператором  $DF_a$ , будет иметь

оптимальное значение порядка преобразования  $a$ , при котором модуль отклика  $DF_a\{c(n)\}$  характеризуется одиночным выбросом максимальной амплитуды. На основании рисунка 1 и учитывая характер влияния дискретного представления сигнала с ЛЧМ на  $\varphi_{opt}$  [8], несложно получить выражение оптимального значения порядка  $a_{opt}$  FrFT для последовательностей вида (6) и (7):

$$a_{opt} = \frac{2}{\pi} \varphi_{opt} = \frac{2}{\pi} \left( \pi - \arctg\left(\frac{F_s T}{N}\right) \right) = \frac{2}{\pi} \left( \pi - \arctg\left(\frac{L}{N}\right) \right), \quad (8)$$

где  $F_s$  – частота дискретизации;  $T$  – длительность анализируемого сигнала;  $N$  – длина  $c(n)$ ;  $L$  – количество отсчетов, приходящееся на  $c(n)$ . Если  $L = N$ , то  $\varphi_{opt}$  принимает значение  $3\pi/4$ , а оптимальный порядок преобразования  $a_{opt} = 1.5$ . В этом случае аргумент максимального значения амплитудного спектра дискретного FrFT  $C_a(m) = DF_a\{c(n)\}$  может быть определено следующим образом [8]:

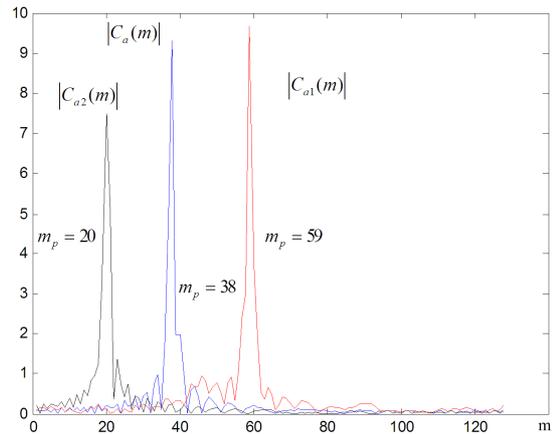
$$m_p = \left\lfloor \frac{N}{2} (1 - \sin(\varphi_{opt})) \right\rfloor, \quad (9)$$

где оператор  $\lfloor \cdot \rfloor$  означает операцию округления до целого значения.

На рисунке 2 представлен результат вычисления FrFT  $C_a(m) = DF_a\{c(n)\}$ ,  $m = 0, N-1$  по алгоритму, предложенному в [11], для  $c(n)$  длины  $N = 255$  и  $a_{opt} = 1.5$ . Согласно (9) положение пика амплитудного спектра  $|C_a(m)|$  соответствует отсчету спектра  $m_p = 38$ . Для примера на рисунке 2 представлены амплитудный спектр  $|C_{a1}(m)| = |DF_a\{c(n - n_s)\}|$ , соответствующий смещению  $c(n)$  во временной области на  $n_s = 30$  отсчетов, и спектр  $|C_{a2}(m)| = \left| DF_a\left\{ c(n) \exp\left( j \frac{2\pi n}{N} df \right) \right\} \right|$ , отражающий внесение в  $c(n)$  относительного частотного смещения  $\varepsilon = df/N = 0.1$ . Максимумы амплитудных спектров  $|C_{a1}(m)|$  и  $|C_{a2}(m)|$  смещены относительно  $|C_a(m)|$  и находятся в точках  $m_{p1} = 20$  и  $m_{p2} = 59$ , что согласуется со свойствами (4) и (5).

Рассмотренные выше уникальные свойства FrFT, проявляющиеся в классе сигналов с ЛЧМ и для полифазных последовательностей Задва-Чу в частности, открывают новые возможности

при решении задачи как временной, так и частотной синхронизации.



**Рисунок 2 – Примеры спектров FrFT для последовательностей  $c(n)$ ,  $c(n - n_s)$  и  $c(n) \exp\left( j \frac{2\pi n}{N} df \right)$  при  $n_s = 30$ ,  $df / N = 0.1$**

Предлагаемый способ временной синхронизации основывается на использовании единственного синхросимвола  $C = \{c(n)\}_{n=0}^{N-1}$ , где  $c(n)$  определяется (6) или (7) в зависимости от четности  $N$ .

В рамках решения поставленной задачи алгоритм определения временного положения STO  $\hat{\delta}$  синхросимвола будет состоять в вычислении следующего выражения:

$$\hat{\delta} = \arg \max_{\delta} \{M(\delta)\}, \quad (10)$$

$$M(\delta) = \sum_{\delta=0}^{L-N-1} \sum_{k=-\Delta k}^{\Delta k} |C_a^{(\delta)}\{m_p + k\}| \times |C_a^{(\delta)}\{N - m_p + k\}|, \quad (11)$$

где  $C_a^{(\delta)} = DF_a\{R_{\delta}\}$ ;  $R_{\delta} = \{r(n)\}_{n=\delta}^{N+\delta-1}$  – матрица строка отсчетов принимаемого сигнала;  $m_p$  – отсчет спектра FrFT, соответствующий ожидаемому положению максимума амплитудного спектра  $R_{\delta}$ ; для выделения максимума амплитудного спектра в (11) применяется окно  $m_p \pm \Delta k$ ,  $\Delta k = 2$ . В соответствии с (10) и (11) алгоритм определения временного положения синхросимвола будет состоять в следующем:

1) для каждого  $\delta \in [0, L - N - 1]$  из массива отсчетов принятого сигнала формируются блоки отсчетов  $R_{\delta} = \{r(n)\}_{n=\delta}^{N+\delta-1}$ ;

2) для всех сформированных в п.1 блоков отсчетов вычисляется FrFT  $C_a^{(\delta)} = DF_a\{R_{\delta}\}$  и рассчитывается значение целевой функции  $M(\delta)$  (11);

3) определяется аргумент  $\hat{\delta}$  функции

$M(\delta)$ , соответствующий максимальному значению  $M(\delta)$ . Найденное значение  $\hat{\delta}$  будет указывать на начало искомого синхросимвола.

**Описание моделируемого канала связи.**

Для исследования предложенного алгоритма оценки STO  $\hat{\delta}$  (10) выбрана система с ортогональным частотным разделением (OFDM, Orthogonal frequency division multiplexing), использующая для синхронизации синхросимволы, описанные в (6) и (7). В общем случае OFDM символ с  $N$  поднесущими может быть записан в виде:

$$x(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N X(k)e^{j2\pi kn/N}, \quad (12)$$

$$-N_g \leq n \leq N-1,$$

где  $X(k)$  – последовательность комплексных данных, передаваемых на  $k$ -й поднесущей, определяемая заданным видом квадратурной модуляции;  $N_g$  – количество отсчетов, приходящихся на циклический префикс (ЦП). С учетом обязательного наличия в передаваемом сигнале ЦП синхросимвол будет иметь следующий вид  $[c(0), c(1), \dots, c(N-1), c(0), c(1), \dots, c(N_g-1)]$ .

Сигнал  $x(n)$  на выходе модели канала связи (КС) с многолучевым распространением можно записать в виде:

$$r(n) = \sum_{m=0}^{M-1} h(m)x(n - \alpha_m) + \omega(n), \quad (13)$$

где  $h(m)$  – комплексные значения импульсной характеристики многолучевого канала связи с  $M$  лучами;  $\alpha_m$  – задержка распространения для  $m$ -го луча;  $\omega(n)$  – шумовая составляющая принимаемого сигнала.

Для анализа влияния многолучевого распространения на функционирование предложенного алгоритма оценки STO  $\hat{\delta}$  (10) используются следующие модели распространения радиоволн:

- модель для стандарта 802.20 [10] для высокоскоростных транспортных средств (Vehicular Test Environmen);
- модель COST 259 [11] для условий городской застройки (Typical Urban) .

Доплеровское смещение спектра задавалось в виде симметричной модели Jakes [12].

Указанные модели позволяют провести исследование качества работы алгоритма временной синхронизации при быстро изменяющейся матрице канальных коэффициентов, что соответствует условиям высокой динамики движения подвижных объектов.

**Экспериментальная часть.** Цель эксперимента состояла в проверке эффективности работы алгоритма оценки STO  $\hat{\delta}$  (10) в условиях как стационарного, так и нестационарного многолучевого распространения.

Имитационное моделирование проводилось для OFDM символов с количеством поднесущих  $N = 256$  и величиной циклического префикса  $N_g = 32$  отсчета. Эффективность алгоритма оценивалась по следующим параметрам:

- средняя квадратичная ошибка получаемых оценок STO  $\hat{\delta}$  :  $\sigma_{\hat{\delta}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\delta - \hat{\delta}_i)^2$ , где  $\delta$  – истинное значение временного положения символа;
- дисперсия оценок STO  $\hat{\delta}$   $D_{\hat{\delta}}$ .

На рисунках 3 и 4 представлены зависимости  $\sigma_{\hat{\delta}}$  и  $D_{\hat{\delta}}$  соответственно от отношения сигнал-шум  $q$  в условиях распространения радиоволн модели для стандарта 802.20 для алгоритма (11) при значении доплеровского смещения спектра  $f_d$ , равного 0 и 100 Гц (кривые 1 и 2 соответственно). Для сравнения на этих рисунках представлены аналогичные зависимости, отражающие качество оценки STO  $\hat{\delta}$  при корреляции  $r(n)$  и искомой последовательности  $c(n)$  (кривые 3 и 4). Дополнительно на рисунках 3 и 4 отражены зависимости качества оценки  $\hat{\delta}$ , полученные в тех же условиях по алгоритму, предложенному в [13], для количества блоков, равного 8 (кривые 5 и 6). Аналогичные зависимости для модели распространения радиоволн COST 259 приведены на рисунках 5 и 6.

Анализ экспериментальных результатов, представленных на рисунках 3–6, приводит к следующим выводам. Для стационарных каналов связи предлагаемый алгоритм показал различную эффективность: в условиях модели для высокоскоростных транспортных средств 802.20 алгоритм обеспечил выигрыш в отношении сигнал-шум порядка 10дБ на уровне  $\sigma_{\hat{\delta}} = 10^{-2}$  (рисунок 3, кривые 1 и 3), в то время как для модели COST 259 выигрыш порядка 1 дБ был получен при отношении сигнал-шум до 0 дБ (рисунок 5, кривая 1).

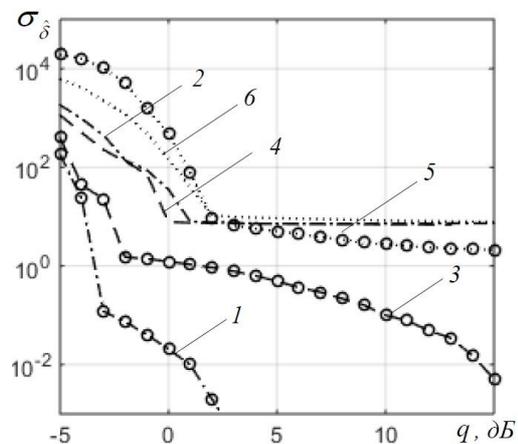


Рисунок 3 – Зависимость  $\sigma_{\hat{\delta}}$  в условиях распространения радиоволн модели для стандарта 802.20

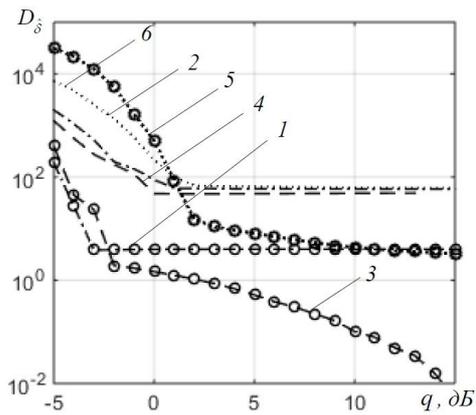


Рисунок 4 – Зависимость  $D_{\hat{\delta}}$  в условиях распространения радиоволн модели для стандарта 802.20

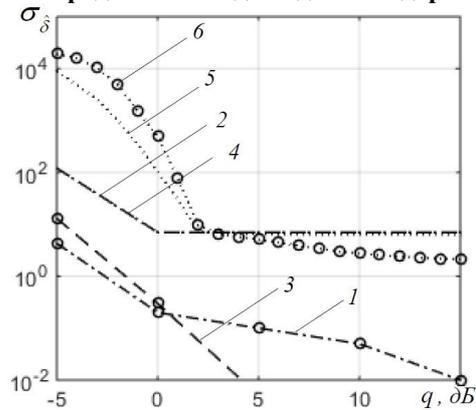


Рисунок 5 – Зависимость  $\sigma_{\hat{\delta}}$  в условиях распространения радиоволн для модели COST 259

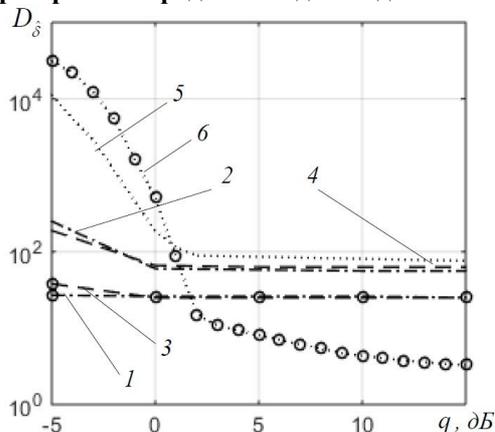


Рисунок 6 – Зависимость  $D_{\hat{\delta}}$  в условиях распространения радиоволн для модели COST 259

В случае нестационарных каналов исследуемый алгоритм позволяет получать качество оценок  $\text{STO } \hat{\delta}$  не хуже, чем при корреляции  $r(n)$  и искомой последовательности  $c(n)$ .

**Заключение.** В данной работе рассмотрена возможность применения дробного преобразования Фурье для решения задачи временной синхронизации сигналов с использованием последовательности Задова-Чу. Предлагаемый алгоритм временной синхронизации, в целом, демонстрирует высокую эффективность оценки временного положения синхросимвола в услови-

ях как стационарного, так и нестационарного многолучевого распространения. Необходимо отметить то обстоятельство, что наибольший эффект от использования дробного преобразования Фурье следует ожидать при совместном использовании этого преобразования с известными методами синхронизации, использующими последовательности Задова-Чу. Анализ способов построения таких алгоритмов частотной и временной синхронизации является предметом перспективных исследований.

Работа выполнена в рамках гранта Российского научного фонда, проект № 14-19-01263.

#### Библиографический список

1. D. C. Chu. Polyphase codes with good periodic correlation properties // IEEE Trans. Inf. Theory. 1972. V. 18. № 4. P. 531-532.
2. R. L. Frank and S. A. Zadoff. Phase shift pulse codes with good periodic correlation properties // IRE Trans. Inform. Theory. 1962. V. 8. № 6. P. 381-382.
3. Yang Wen, Wei Huang and Zhongpei Zhang. CAZAC sequence and its application in LTE random access. // Information Theory Workshop. 2006. ITW '06 Chengdu, IEEE. 2006. P.544-547.
4. B. Park and H. Cheon, C. G. Kang, and D. S. Hong. A Novel Timing Estimation Method for OFDM systems // IEEE Commun. Lett. 2003. V. 7, P. 239 – 241.
5. S. D. Choi, J. M. Choi, J. H. Lee. An initial timing offset estimation method for OFDM systems in Rayleigh fading channel // IEEE 64th Vehicular Technology Conference. 2006. P. 1-5.
6. C. Candan, M. A. Kutay, H. M. Ozaktas. The discrete fractional Fourier transform // Signal Processing, IEEE Transactions. 2000. V. 48. P. 1329-1337.
7. V.A. Narayanan, K.M. Prabhu. The fractional Fourier transform: theory, implementation and error analysis // Microprocessors and Microsystems. 2003. V. 27(10). P. 511-521.
8. R. Jacob, T. Thomas, A. Unnikrishnan. Applications of Fractional Fourier Transform in Sonar Signal Processing. // IETE Journal of Research. 2009. V. 55. P. 16-27.
9. Y. Liu, P. Fan. Modified Chu sequences with smaller alphabet size // Electronics Letters. 2004. V. 40. N. 10. P. 598-599.
10. IEEE 802.20 Mobile Broadband Wireless Access Working Group. Channel Models for IEEE 802.20 MBWA System Simulations. 2005.
11. ETSI TR 125 943. Universal Mobile Telecommunications System (UMTS). Version 7.0.0. Release 7. 2007.
12. C. Iskander. A MATLAB R-based Object-Oriented Approach to Multipath Fading Channel Simulation. [http://www.mathworks.com/matlab\\_central/mlc-downloads/downloads/submissions/18869/versions/1/download/pdf/ChannelModelingWhitePaper.pdf](http://www.mathworks.com/matlab_central/mlc-downloads/downloads/submissions/18869/versions/1/download/pdf/ChannelModelingWhitePaper.pdf) (дата обращения 27.09.2015)
13. Hlaing Minn, Vijay K. Bhargava, Khaled Ben Letaief. A Robust Timing and Frequency Synchronization for OFDM Systems // IEEE Transactions on Wireless communications. 2003. V. 2. N. 4, P. 822-838.