УДК 621.37:51-74

В.Г. Андреев, Н.Л. Чан

СИНТЕЗ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ АВТОРЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ ПО КОРОТКОЙ ВЫБОРКЕ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Предложен и исследован метод оптимизации переопределённой авторегрессионной модели случайных сигналов, представленных короткими выборками. Метод основан на учёте в виде весового вектора **w** *точности оценок коэффициентов автокорреляции при расчёте параметров авторегрессионной модели. Показано, что предлагаемый подход дает возможность уменьшать в 1,2…4 раза невязку между контрольным и модельными спектрами за счёт введения в авторегрессионную модель дополнительной информации о точности оценок автокорреляционной функции, зависящих от длины выборки случайного сигнала.*

Ключевые слова: *переопределённая система уравнений Юла – Уолкера, спектр, весовой вектор, спектральное оценивание, параметрическая модель, авторегрессионная модель, авторегрессия, спектральная плотность мощности.*

Введение. Одна из важных задач в различных приложениях радиотехники – получение спектральной плотности мощности (СПМ) случайного процесса, представленного ограниченным по времени наблюдением. Особую актуальность данная задача приобретает в условиях коротких временных выборок, полученных экспериментально.

Обычно для повышения спектрального разрешения при жёстких ограничениях на длительность наблюдений используют авторегрессионную (АР) модель, применяя параметрический подход к оценке спектра [1, 2]. Отметим, что при этом решение задачи спектрального оценивания на основе теоремы Винера – Хинчина затруднено, так как длительность автокорреляционной последовательности (дискретной автокорреляционной функции) в условиях коротких выборок наблюдений ограничена и/или точность оценок коэффициентов $R_{j,k}$ автокорреляции невысока [1].

Традиционно параметры АР-моделей находятся из решения системы линейных уравнений Юла – Уолкера [1], основанной на обращении корреляционной матрицы **R** моделируемого процесса. При этом дающие его компактное описание низкие порядки p моделирующего фильтра не позволяют учесть влияние старших коэффициентов $R_{j,k}$ корреляции с индексами $|j-k|>p$, что снижает адекватность спектрального оценивания авторегрессионным параметрическим методом [3]. Поэтому применяются [4, 5] переопределенные системы уравнений Юла – Уолкера с различной глубиной c переопределенности. Однако при короткой длине N выборки недостаток подобного подхода заключается в низкой точности оценок старших коэффициентов $R_{j,k}$ автокорреляции из-за сокращения статистического материла для их усреднения при $|j-k|\to N$. Вместе с тем как будет показано ниже, существует возможность найти весовой вектор **w** коэффициентов w_n, домножение на которые полученных оценок $R_{j,k}$ дискретной автокорреляционной функции приводит к повышению точности оценивания СПМ по критерию минимума нормированного квадрата длины E_s вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ невязки между модельным и контрольным энергетическими спектрами. Значения коэффициентов w_n имеют смысл точности оценок $R_{j,k}$ при $n=|j-k|$.

Цель работы — разработка методики синтеза модифицированных переопределенных АР-моделей, которая дает повышение точности спектрального оценивания в условиях коротких выборок наблюдений.

Постановка задачи. Вектор **a** авторегрессии АР-модели находится из решения системы линейных уравнений Юла – Уолкера, которое для дальнейшего изложения удобно представить в следующем, эквивалентном известному [1] виде [6, 7]:

$$\mathbf{a} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{R}$ – $(p\times p)$-мерная автокорреляционная квадратная матрица, $\mathbf{r}$ – p-мерный крайний левый вектор-столбец $[(p+1)\times(p+1)]$-мерной матрицы $\mathbf{R}$ без её верхнего элемента $R_{0,0}$.

Чтобы получить более точное решение и найти оптимальный вектор $\tilde{\mathbf{a}}$, учитывающий старшие коэффициенты корреляции, модуль разницы $|j-k|$ индексов которых превышает порядок p модели, используется переопределённая система линейных уравнений, которая решается по критерию минимума квадрата длины Е вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ невязки [1]:

$$\mathrm{E} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\varepsilon}, \text{ где } \boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{a}}, \qquad (2)$$

где $\tilde{\mathbf{a}}$ – модифицированный вектор авторегрессии, полученный из переопределенной системы линейных уравнений (2); $\tilde{\mathbf{R}}$ – $[(c+p)\times p]$-мерная корреляционная матрица и $\tilde{\mathbf{r}}$ – $(p+c)$-мерный вектор-столбец коэффициентов автокорреляции; $^{\mathrm{H}}$ – знак комплексного сопряжения и транспонирования.

Выражения (2) описывают оптимизационную функцию:

$$\mathrm{E} = (\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{a}})^{\mathrm{H}}(\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{a}}) \to \min_{\tilde{\mathbf{a}}\in \mathrm{C}^{p}}, \qquad (3)$$

где C^p — p-мерное пространство комплексных чисел.

Для определения оптимального вектора $\tilde{\mathbf{a}}$ возьмем производную по $\tilde{\mathbf{a}}$ от функции (3):

$$\begin{aligned} d\mathrm{E}/d\tilde{\mathbf{a}}^{\mathrm{H}} &= d[(\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{a}})^{\mathrm{H}}(\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{a}})]/d\tilde{\mathbf{a}}^{\mathrm{H}} = \\ &= -2\tilde{\mathbf{R}}^{\mathrm{H}}\tilde{\mathbf{r}} + 2\tilde{\mathbf{R}}^{\mathrm{H}}\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{a}}. \end{aligned} \qquad (4)$$

Приравняв (4) к нулю, получим оптимальный вектор [1]:

$$\tilde{\mathbf{a}} = -(\tilde{\mathbf{R}}^{\mathrm{H}}\tilde{\mathbf{R}})^{-1}\tilde{\mathbf{R}}^{\mathrm{H}}\tilde{\mathbf{r}}. \qquad (5)$$

Отметим, что использование старших коэффициентов автокорреляции в выражениях (2)-(5) сопряжено со сложностью их адекватной оценки по короткой экспериментальной выборке. Поэтому в статье предусматривается взвешивание полученных по коротким реализациям экспериментальных процессов оценок коэффициентов автокорреляции $R_{j,k}$ представленного короткой выборкой процесса.

Аналитическое решение. При использовании границы Крамера – Рао для оценивания потенциальной точности определения коэффициентов $R_{j,k}$ автокорреляции предлагается выбрать дискретную весовую функцию в виде вектора $\mathbf{w}$ с компонентами

$$w_n=[(N-n)/N]^2, \qquad (6)$$

где N – количество отсчётов анализируемого процесса, спектральная плотность мощности которого оценивается. Анализ выражения (6) расчёта весовых коэффициентов w_n, учитывающих точность измерения элементов дискретной автокорреляционной функции, показывает, что при $n<<N$ весовые коэффициенты удовлетворяют приблизительному равенству $w_n\approx 1$, а при $n\to N$ значения w_n стремятся к нулю, отражая тенденцию потери точности при недостаточном статистическом материале для усреднения оценок $R_{j,k}$. Поэтому значение веса $1\geq w_n\geq 0$ учитывает увеличение дисперсии оценки $R_{j,k}$ с уменьшением длины $(N-n)$ выборки. Весовые коэффициенты w_n используются для коррекции оценок коэффициентов $R_{j,k}$ автокорреляции при $|j-k|=n$ для улучшения качества авторегрессионных моделей.

При учёте величин w_n, формирующих вектор $\mathbf{w}$, целевая функция (2) модифицируется и принимает следующий вид:

$$\mathrm{E}_{\mathrm{w}} = \|\mathrm{diag}(\mathbf{w})\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 \to \min_{\hat{\mathbf{a}}\in \mathrm{C}^{p}}, \qquad (7)$$

где E_{w} — квадрат длины взвешенного вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ невязки, $\hat{\mathbf{a}}$ – оценка вектора коэффициентов авторегрессии предлагаемым методом, $\|\bullet\|$ – операция вычисления евклидовой нормы вектора.

Выражение (7) описывает оптимизационную функцию:

$$\mathrm{E}_{\mathrm{w}} = (\mathbf{W}\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{W}\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{a}})^{\mathrm{H}}(\mathbf{W}\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{W}\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{a}}) \to \min_{\hat{\mathbf{a}}\in \mathrm{C}^{p}}, \qquad (8)$$

где $\mathbf{W}$=diag($\mathbf{w}$) – квадратная матрица с элементами w_n вектора $\mathbf{w}$ на главной диагонали, n=1, 2,…, $(p+c)$.

Аналогично (5) решение этой оптимизационной задачи сводится к виду:

$$\hat{\mathbf{a}} = -(\tilde{\mathbf{R}}^{\mathrm{H}}\mathbf{W}^{\mathrm{H}}\mathbf{W}\tilde{\mathbf{R}})^{-1}\tilde{\mathbf{R}}^{\mathrm{H}}\mathbf{W}^{\mathrm{H}}\mathbf{W}\tilde{\mathbf{r}}, \qquad (9)$$

где матрица преобразований в нормальной переопределённой системе линейных уравнений представляет собой произведение $\mathbf{W}\tilde{\mathbf{R}}$, а $\mathbf{W}\tilde{\mathbf{r}}$ – вектор желаемых решений [8]. Для практических расчётов $\hat{\mathbf{a}}$ по выражению (9) оно было модифицировано для регуляризации задачи обращения произведения $\tilde{\mathbf{R}}^{\mathrm{H}}\mathbf{W}^{\mathrm{H}}\mathbf{W}\tilde{\mathbf{R}}$ матриц и для учёта фактов диагональности и действительности элементов w_n матрицы $\mathbf{W}$, рассчитанных по (6):

$$\hat{\mathbf{a}} = -(\tilde{\mathbf{R}}^{\mathrm{H}}\mathbf{W}^{2}\tilde{\mathbf{R}} + \lambda\mathbf{I})^{-1}\tilde{\mathbf{R}}^{\mathrm{H}}\mathbf{W}^{2}\tilde{\mathbf{r}}, \qquad (10)$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица; λ – регуляризующая величина, которая выбиралась из условия: cond2($\tilde{\mathbf{R}}^{\mathrm{H}}\mathbf{W}^{\mathrm{H}}\mathbf{W}\tilde{\mathbf{R}}$)<$10^6$, где cond2(●) – оператор, определяющий число обусловленности матрицы. Регуляризация решения даёт возможность получить практически приемлемые решения, так как введение в произведение матриц $\tilde{\mathbf{R}}^{\mathrm{H}}\tilde{\mathbf{R}}$, подлежащих обращению в (5), дополнительных компонент $\mathbf{W}^H\mathbf{W}$ ухудшает обусловленность задачи (9) в силу того, что при перемножении матриц перемножаются и их собственные числа [8].

Экспериментальные исследования. На рисунке 1 приведены результаты спектрального оценивания с помощью авторегрессионных параметрических методов в условиях слабых зашумлений (отношение P_n мощностей белого шума и исследуемого коррелированного сигнала $P_n=10^{-8}$) и при коротких (N=100 отсчётов) выборках наблюдений. Коррелированный сигнал, подлежащий спектральному анализу, был принят одномодовым по спектру стационарным гауссовским с относительной шириной ΔFT=0,1 спектра моды и её гауссовской огибающей. Подобные сигналы характерны для многих прикладных областей радиотехники, характеризуя, например, отражения электромагнитных волн от атмосферных гидрометео-образований [9, 10].

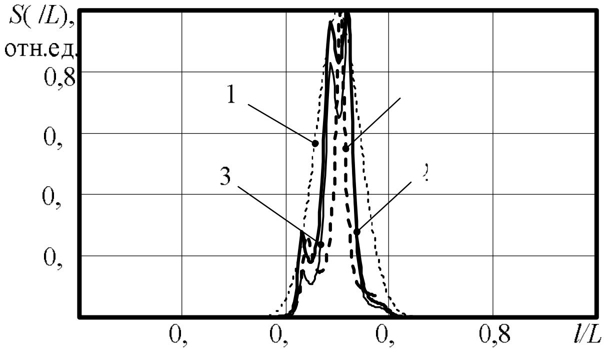

Рисунок 1— Оценки спектральных плотностей мощности

На рисунке 1 введены следующие условные обозначения: S(l/L) – нормированная к своему максимальному значению спектральная плотность мощности, l/L – относительная частота, численно равная отношению номера l текущего спектрального отсчёта к общему их числу L=1024; пунктирная тонкая кривая 1 – контрольный спектр (СПМ, полученная по незашумлённым данным с помощью АР-модели сорокового порядка); пунктирная жирная кривая 2 – СПМ, полученная на основе простой АР-модели (без переопределённости); сплошная тонкая кривая 3 – на основе известной переопределенной АР-модели; сплошная жирная кривая 4 – на основе предлагаемой модели. Кривые 2…4 получены при одинаковом порядке p=5 сравниваемых авторегрессионных моделей.

Из анализа рисунка 1 можно видеть, что качество оценивания спектра у предлагаемой модели лучше, чем у известных параметрических АР-методов. Для объективной оценки эффективности предлагаемого подхода сформируем вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ невязки между векторами отсчетов спектральных плотностей мощности:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \mathbf{c} - \mathbf{s}, \tag{11}$$

где $\mathbf{c}$ — L-мерный вектор СПМ контрольной модели, в качестве которой используют энергетический спектр, полученный с помощью АР-модели большого (p=40) порядка при неограниченной выборке $N\to\infty$ (приняты рассчитанные теоретически коэффициенты корреляции); $\mathbf{s}$ — L-мерный вектор СПМ, полученный сопоставляемыми АР-методами.

В качестве критерия адекватности принята нормированная величина E_s квадрата длины L-мерного вектора-столбца $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ невязки:

$$\mathrm{E}_s = \boldsymbol{\varepsilon}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_s / L, \tag{12}$$

где L – число спектральных отсчетов.

Результаты сравнения адекватности моделирования при использовании различных подходов сведены в таблицу 1.

Таблица 1 — Сравнение адекватности моделей

Модели (при ΔFT=0,1)	Обычная (p=5, c=0)	Переопределённая (p=5, c=20)	Предлагаемая (p=5, c=20)
Невязка E_s	0,03	0,016	$9{,}281\cdot10^{-3}$

Как следует из анализа данных, сведенных в таблицу 1, эксперименты показали, что нормированный квадрат длины E_s вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ невязки у предлагаемой модели имеет в 2 раза меньшую величину, чем у известной переопределенной модели с той же глубиной переопределённости (c=20) и в 3 раза меньшую величину, чем у обычной АР-модели того же порядка (p=5).

Проанализируем влияние аддитивного белого гауссовского шума на адекватность спектрального оценивания (см. рисунок 2) описанного выше коррелированного процесса. При формировании приведенной на рисунке 2 зависимости десятичного логарифма величины E_s от относительной мощности P_n некоррелированного шума было принято L=1024, p=5, c=20.

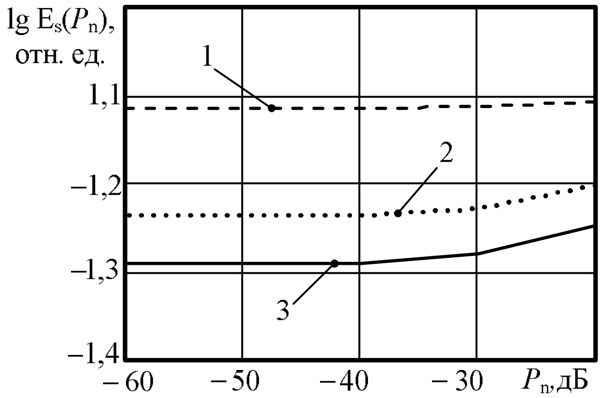

Рисунок 2 — Логарифмические зависимости длины вектора невязки от мощности шума

На рисунке 2 обозначены: пунктирной линией 1 – нормированный квадрат длины E_s вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ невязки для обычной АР-модели; точечной линией – известной переопределённой модели; сплошной линией 3 – предлагаемой модели. Из приведенных на рисунке 2 зависимостей следует, что предлагаемая модель имеет самое высокое качество, а обычная АР-модель имеет низкое качество.

Для числового сравнения адекватности методов введем относительные различия ΔE_1 и ΔE_2 между величинами E_s обычной АР-модели и переопределенной модели, а также предлагаемой модели и переопределенной модели соответственно:

$$\Delta E_1=(E_1-E_2)/E_2;\Delta E_2=(E_2-E_3)/E_2, \qquad (13)$$

где E_1, E_2, E_3 – нормированные квадраты длин векторов невязки для обычной АР-модели, переопределенной и предлагаемой моделей соответственно.

Анализ зависимостей (13) показал, что для приведенного выше примера относительные различия для рассмотренных АР-методов лежат в пределах $\Delta E_1 \approx 2\ldots3{,}8$, а для предлагаемого метода $\Delta E_2 \approx 0{,}4\ldots1{,}6$. Так, при $P_n=-50$ дБ значения относительных различий соотносятся, как $\Delta E_1/\Delta E_2 \approx 5$, а при увеличении мощности шума до $\lambda=-20$дБ выигрыши $\Delta E_1/\Delta E_2$ достигают 10 раз.

Проанализируем результаты спектрального оценивания при увеличении относительной ширины спектра в три раза ($\Delta FT=0{,}3$) и $P_n=10^{-8}$. На рисунке 3 использованы аналогичные принятым на рисунке 1 условные обозначения.

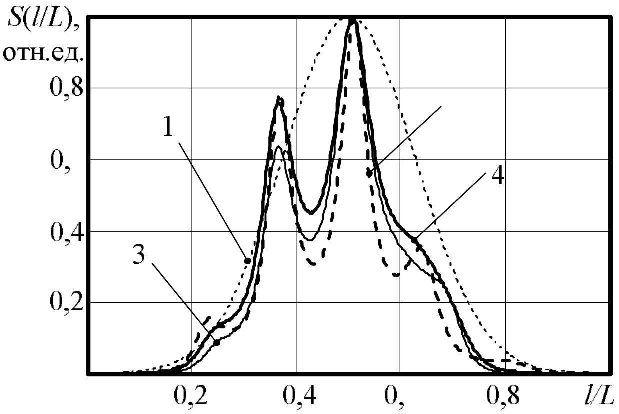

Рисунок 3 — Оценки спектральных плотностей мощности

Из анализа рисунка 3 видно, что преимущества предлагаемого подхода сохраняются с ростом ширины спектра моделируемого процесса. Качество оценивания спектра предлагаемой методикой лучше, чем при использовании известных параметрических АР-методов с аналогичными значениями $p=5$, $c=20$ и относительной мощности шума $P_n=10^{-8}$.

Для объективной оценки сведём в таблицу 2 нормированные квадраты длин E_s векторов невязок между оцениваемыми и контрольным спектрами.

Таблица 2 — Сравнение адекватности моделей

Модели (при $\Delta FT=0{,}3$)	Обычная ($p=5$, $c=0$)	Переопределённая ($p=5$, $c=20$)	Предлагаемая ($p=5$, $c=20$)
Невязка E_s	0,03	0,018	$7{,}128\cdot10^{-3}$

Из анализа таблицы 2 нетрудно видеть, что квадрат длины E_s вектора невязки у предлагаемой модели имеет в 2,5 раза меньшую величину, чем у известной переопределенной модели с той же глубиной переопределённости ($c=20$) и в 4 раза меньшую величину, чем у обычной АР-модели того же порядка ($p=5$).

Проанализируем влияние порядка p моделей на адекватность спектрального оценивания (см. рисунок 4).

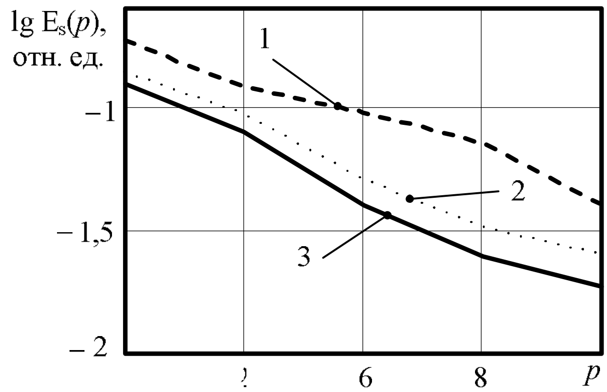

Рисунок 4 — Логарифмические зависимости длины вектора невязки от порядка моделей

При формировании приведенной на рисунке 4 зависимости десятичного логарифма величины E_s от порядка p моделей было принято $L=1024$, $P_n=10^{-8}$, $c=20$, $\Delta FT=0{,}3$. На рисунке 4 использованы аналогичные принятым на рисунке 2 условные обозначения: пунктирной линией 1 показан нормированный квадрат длины E_s вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ невязки для обычной АР-модели; точечной линией – для известной переопределённой модели; сплошной линией 3 – для предлагаемой модели. Из анализа рисунка 4 видно, что адекватность спектрального оценивания различными подходами увеличивается с ростом порядка p моделей, но предлагаемый метод даёт возможность уменьшить на одну-две единицы порядок переопределённой АР-модели при сохранении той же величины E_s нормированного квадрата длины вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ невязки между контрольным с и модельным **s** спектрами. При сопоставлении эффективности по критерию (12) с обычной АР-моделью снижение порядка может достигать двух раз. Например, при $\lg E_s = -1{,}5$ использование предлагаемой методики даёт возможность снизить порядок p переопределённой модели с 8-ми до 7-ми, а для обеспечения той же адекватности E_s спектрального оценивания с помощью обычной АР-модели необходим её порядок p=12.

Числовое сравнение адекватности методов по зависимостям (13) показывает, что для приведенного выше примера относительные различия для различных АР-методов лежат в пределах $\Delta E_1 \approx 0{,}5 \ldots 1{,}9$ а для предлагаемого метода $\Delta E_2 \approx 0{,}1 \ldots 0{,}3$. Так, при p=2 значения относительных различий соотносятся, как $\Delta E_1/\Delta E_2 \approx 5$, а при увеличении порядка моделей до p=10 выигрыши $\Delta E_1/\Delta E_2$ достигают 20 раз.

Выводы. Таким образом, предложен и исследован метод оптимизации переопределённой авторегрессионной модели случайных сигналов, представленных короткими (сотни и менее отсчётов) выборками. Метод основан на учёте в виде весового вектора $\mathbf{w}=[w_n]$ точности $w_n=[(N-n)/N]^2$ оценок коэффициентов $R_{j,k}$ автокорреляции при расчёте параметров авторегрессионной модели. Значения точности w_n рассчитаны на основе границы Крамера – Рао для оценок коэффициентов $R_{j,k}$ автокорреляции случайного процесса по его ограниченной выборке, длиной в N отсчётов. Эксперименты показали (см. таблицы 1, 2), что предлагаемый подход дает возможность уменьшить в 1,2…4 раза относительную длину E_s вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ невязки между контрольным **c** и модельными **s** спектрами по сравнению с известными авторегрессионными методами спектрального оценивания при ограниченной длине N=100 выборки процесса. Выигрыши достигаются за счёт учёта дополнительной информации о точности w_n оценок коэффициентов $R_{j,k}$ автокорреляции при расчёте параметров $\hat{\mathbf{a}}$ переопределённой авторегрессионной модели по (10).

Работа выполнена при поддержке государственной субсидии (Соглашение № 14.574.21.0012; УНК RFMEFI57414X0012).

Библиографический список

1. *Марпл-мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения: пер. с англ. М.: Мир, 1990. 584 с.

2. *Кошелев В.И.* АРСС-модели случайных процессов. Прикладные задачи синтеза и оптимизации. М.: Радио и связь, 2002. 112 с.

3. *Андреев В.Г., Нгуен Ш.В.* Параметрическое моделирование коррелированных радиоотражений для анализа эффективности обработки эхо-сигналов // Вестник Рязанской государственной радиотехнической академии. 2006. № 18. С. 40-45.

4. *Андреев В.Г.* Оптимизация авторегрессионных моделей мешающих радиоотражений // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 2008. Т. 51. № 7. С. 40-47.

5. *Миронов С.Н., Костров В.В.* Переопределенная АР-модель одномодовых мешающих отражений с заданными спектральными характеристиками // Цифровая обработка сигналов. 2003. № 3. С. 3–7.

6. *Андреев В.Г.* Оптимизация авторегрессионных моделей радиоотражений // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2011. № 35. С. 12-15.

7. *Андреев В.Г., Белокуров В.А.* Моделирование магнитометрических сигналов бесплатформенных инерциальных навигационных систем // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2013. № 1 (43). С. 45-49.

8. *Райс Дж. Р.* Матричные вычисления и математическое обеспечение / пер. с англ. О.Б. Арушаняна. М.: Мир, 1984. 264 с.

9. *Горелик А.Г., Коломиец С.Ф., Куприянов П.В.* Форма спектра рассеянного поля как источник информации о рассеивающей среде и протекающих в ней динамических процессах // Научный вестник МГТУ ГА. Серия «Радиофизика и электроника». 2012. Вып. 176. С. 18.

10. *Коломиец С.Ф.* Интерпретация Z-R соотношения в дождях на конечных периодах времени измерения с учетом условий рассеяния Ми // Успехи современной радиоэлектроники. 2007. № 12. С. 51-61.