

УДК 621.391

М.Б. Казаленко**ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ СИНУСОИДАЛЬНОГО СИГНАЛА ПРИ ЛИНЕЙНОЙ АМПЛИТУДНОЙ МОДУЛЯЦИИ**

Представлена адаптация алгоритма нелинейных наименьших квадратов для оценки частоты, фазы, амплитуды и параметров модуляции для синусоидального сигнала при наличии амплитудной модуляции по линейному закону. Применение метода проекции переменных позволяет свести задачу к одномерному численному поиску максимума целевой функции. Чувствительность оценки частоты к аддитивному шуму исследована с помощью метода Монте-Карло. Полученные оценки чувствительности количественно соответствуют теоретической границе Крамера-Рао.

Ключевые слова: оценка частоты, метод нелинейных наименьших квадратов, метод проекции переменных.

Введение. В задачах дистанционного зондирования возникает проблема оценки фазы, частоты и амплитуды синусоидального сигнала. Если в сигнале также присутствует линейная амплитудная модуляция, она нередко несёт важную информацию, как, например, скорость перемещения зондируемого объекта внутри лепестка диаграммы направленности антенны. Популярным методом оценки неизвестных параметров сигнала является нелинейная регрессия, минимизирующая евклидову норму невязки между дискретизированным сигналом и его моделью [1]. При оценке параметров сигнала этим методом нелинейных наименьших квадратов (ННК) без учёта амплитудной модуляции её наличие в сигнале приведёт к смещённой оценке. Ранее предложенный способ реализации ННК для модулированных сигналов [2] применим к сигналам с произвольным законом амплитудной модуляции, однако он сформулирован для комплексных сигналов, где задача оценки амплитудной модуляции упрощается постоянством модуля комплексной экспоненты. Данная работа ставит своей целью адаптацию метода нелинейных наименьших квадратов для анализа действительных сигналов с линейной амплитудной модуляцией с целью снижения вычислительных затрат и сложности реализации алгоритма. Мы используем специально выбранную параметризацию модели сигнала, которая облегчает использование метода проекции переменных в методе ННК, что позволяет выявить и количественно оценить линейную амплитудную модуляцию без использования алгоритмов многомерной оптимизации. Предлагаемая реализация алгоритма ННК применима как к комплексным, так и к действительным сигналам.

Теоретическая часть. Предполагается, что анализируемый сигнал представляет собой N отсчётов линейно-модулированной синусоиды, возмущённой аддитивным шумом:

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^{(0)} + \mathbf{n},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(0)} &= [y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_N^{(0)}], \\ y_n^{(0)} &= A_1^{(0)} \cos(f^{(0)}t_n + \varphi^{(0)}) + \\ &+ A_2^{(0)}t_n \cos(f^{(0)}t_n + \phi^{(0)}), \end{aligned} \quad (1)$$

$t_n = n - (N + 1)/2$. Отметим, что фазы постоянной и линейно-модулированной составляющих могут отличаться. Оценка параметров сигнала методом ННК подразумевает поиск минимума евклидовой нормы невязки $\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{m}$ между сигналом \mathbf{y} и его моделью \mathbf{m}

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= [m_1, m_2, \dots, m_N], \\ m_n &= A_1 \cos(ft_n + \varphi) + \\ &+ A_2t_n \cos(ft_n + \phi). \end{aligned} \quad (2)$$

Норма невязки является нелинейной функцией сигнала \mathbf{y} и параметров модели $A_1, A_2, f, \varphi, \phi$. Получение оценки ННК для заданного сигнала требует поиска минимума функции пяти переменных, при этом следует учитывать, что, кроме глобального минимума, эта функция имеет порядка N локальных. Данная статья применяет метод проекции переменных [3,4] и специальную параметризацию модели сигнала с целью свести поиск минимума функционала ННК к одномерной задаче оптимизации.

С этой целью введём косинус- и синус-векторы \mathbf{c}, \mathbf{s} :

$$\mathbf{c}(f) = [c_1, c_2, \dots, c_N], \quad c_n = \cos(ft_n)$$

$$\mathbf{s}(f) = [s_1, s_2, \dots, s_N], \quad s_n = \sin(ft_n).$$

В силу выбора начала отсчёта индекса t_k ,

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{s} = 0.$$

Модель сигнала эквивалентно записывается с использованием этих векторов и их производных по частоте

$$\mathbf{m} = [\mathbf{c}, \mathbf{s}, \mathbf{c}', \mathbf{s}'] \mathbf{a}, \quad (3)$$

где

$$\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_4]^T,$$

$$a_1 = A_1 \cos(\phi), \quad a_2 = -A_1 \sin(\phi)$$

$$a_3 = A_2 \sin(\phi) \quad a_4 = A_2 \cos(\phi).$$

Такое представление модели сигнала яснее показывает разделение между параметрами, от которых модель зависит линейно, и единственным нелинейным параметром частотой. Однако оно имеет тот недостаток, что базисные векторы не ортогональны, а их норма зависит от частоты. Поэтому для упрощения анализа задачи введём базисные косинус- и синус-векторы единичной длины:

$$\mathbf{e}_c(f) = \frac{\mathbf{c}(f)}{\|\mathbf{c}(f)\|},$$

$$\mathbf{e}_s(f) = \frac{\mathbf{s}(f)}{\|\mathbf{s}(f)\|},$$

и их производные по частоте:

$$\mathbf{e}'_c(f) = (\mathbf{c}^2)^{-3/2} ((\mathbf{c}^2) \mathbf{c}' - (\mathbf{c} \mathbf{c}') \mathbf{c}),$$

$$\mathbf{e}'_s(f) = (\mathbf{s}^2)^{-3/2} ((\mathbf{s}^2) \mathbf{s}' - (\mathbf{s} \mathbf{s}') \mathbf{s}).$$

Система векторов

$$\mathbf{E}(f) = [\mathbf{e}_c, \mathbf{e}_s, \mathbf{e}'_c, \mathbf{e}'_s] \quad (4)$$

является ортогональной для всех значений f . Действительно, ортогональность синус- и косинус-составляющих обеспечивается выбором t_k , а в ортогональности производных можно убедиться, продифференцировав условия нормировки:

$$(\mathbf{e}_c \mathbf{e}_c) = (\mathbf{e}_s \mathbf{e}_s) = 1.$$

Разложим модель сигнала по этой системе:

$$\mathbf{m}(f, \mathbf{b}) = \mathbf{E} \mathbf{b},$$

$$\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_4]^T, \quad (5)$$

где

$$b_1 = \sqrt{\frac{N}{2}(1+G(f))} \times$$

$$\times \left[a_1 + \frac{a_3}{2} \frac{G'(f)}{1+G(f)} \right], \quad (6)$$

$$b_2 = \sqrt{\frac{N}{2}(1-G(f))} \times$$

$$\times \left[a_2 - \frac{a_4}{2} \frac{G'(f)}{1-G(f)} \right], \quad (7)$$

$$b_3 = \sqrt{\frac{N}{2}(1+G(f))} a_3,$$

$$b_4 = \sqrt{\frac{N}{2}(1-G(f))} a_4, \quad (8)$$

здесь $G(f) = \frac{\sin(Nf)}{N \sin(f)}$.

Подчеркнём, что представление модели сигнала (2) в форме (5) является полностью эквивалентным, не подразумевая никакой аппроксимации. Формулы (6)-(8) устанавливают взаимно однозначное соответствие между этими двумя параметризациями модели сигнала \mathbf{m} .

В силу ортогональности базисных векторов норма модели сигнала в предложенном базисе имеет простой вид:

$$\|\mathbf{y}\|^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \|\mathbf{e}'_c\|^2 + b_4^2 \|\mathbf{e}'_s\|^2,$$

причём

$$\|\mathbf{e}'_c\|^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{1+G(f)} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{3}(N^2-1) + G''(f) - \frac{(G'(f))^2}{1+G(f)} \right)$$

$$\|\mathbf{e}'_s\|^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{1-G(f)} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{3}(N^2-1) - G''(f) - \frac{(G'(f))^2}{1-G(f)} \right).$$

Далее, нахождение значений \mathbf{b} , минимизирующих невязку \mathbf{r} при заданной частоте f , сводится к вычислению скалярных произведений сигнала и базисных векторов:

$$\mathbf{b}^{(\min)}(\mathbf{y}, f) = \arg \min_{\mathbf{b}} \|\mathbf{y} - \mathbf{m}(f, \mathbf{b})\|,$$

$$b_1^{(\min)}(\mathbf{y}, f) = \mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_c(f)$$

$$b_2^{(\min)}(\mathbf{y}, f) = \mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_s(f) \quad (9)$$

$$b_3^{(\min)}(\mathbf{y}, f) = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}'_c(f)}{\|\mathbf{e}'_c(f)\|^2}.$$

$$b_4^{(\min)}(\mathbf{y}, f) = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}'_s(f)}{\|\mathbf{e}'_s(f)\|^2}$$

Модель сигнала для заданной частоты, минимизирующая невязку, в методе проекции переменных становится функцией только частоты

и самого сигнала:

$$\mathbf{m}(f, \mathbf{b}^{(\min)}(\mathbf{y}, f)).$$

Поэтому невязка между дискретизированным сигналом и его моделью в форме линейно-модулированной синусоиды может рассматриваться как функция одной лишь частоты. Минимум нормы невязки является максимумом целевой функции, зависящей только от частоты и отсчётов зашумлённого сигнала

$$\begin{aligned} R^2(\mathbf{y}, f) &= \mathbf{y}^2 - \mathbf{r}^2 = \\ &= (\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_c(f))^2 + (\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_s(f))^2 \\ &+ \left(\frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}'_c(f)}{\|\mathbf{e}'_c(f)\|} \right)^2 + \left(\frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}'_s(f)}{\|\mathbf{e}'_s(f)\|} \right)^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Для модели, представляющей собой синусоиду без линейной модуляции, целевая функция

$$R_0^2(\mathbf{y}, f) = (\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_c(f))^2 + (\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_s(f))^2, \quad (11)$$

известна как «модифицированная периодограмма» и была предложена в работе [5]. В литературе по линейной регрессии величину, аналогичную $R_0 / \|\mathbf{y}\|$, называют «коэффициент детерминации» [6].

Таким образом, поиск частоты, дающей решение задачи ННК минимума невязки \mathbf{r} для заданного сигнала \mathbf{y} , сводится к нахождению максимума $R(\mathbf{y}, f)$ как функции частоты

$$f^{(\min)} = \arg \max_f R(\mathbf{y}, f). \quad (12)$$

Когда $f^{(\min)}$ найдена, оценки ННК для параметров модели в форме (5) даются формулами (9). В свою очередь, параметры модели в форме (5) можно восстановить, обращая (6)-(8)

$$\begin{aligned} \varphi &= \text{atan2}(-a_2, a_1), \quad A_1 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \\ \phi &= \text{atan2}(a_3, a_4), \quad A_2 = \sqrt{a_3^2 + a_4^2}, \\ a_3 &= \sqrt{\frac{2}{N(1+G(f))}} b_3, \\ a_1 &= \sqrt{\frac{2}{N(1+G(f))}} b_1 - \frac{1}{2} \frac{G'(f)}{1+G(f)} a_3, \\ a_4 &= \sqrt{\frac{2}{N(1-G(f))}} b_4, \\ a_2 &= \sqrt{\frac{2}{N(1-G(f))}} b_2 + \frac{1}{2} \frac{G'(f)}{1-G(f)} a_4. \end{aligned}$$

Здесь $\text{atan2}(x, y)$ – расширенный арктангенс. Описываемый здесь подход является упрощённым частным случаем метода проекции

переменных, предложенного в [3], соответствующим одной нелинейной переменной и матрице правой части с ортогональными столбцами.

Составляющая аддитивного шума \mathbf{n} в линейной оболочке базисных векторов вызовет ошибку в оценке частоты, фазы, амплитуды и её модуляции. Эта ошибка стремится к нулю, когда $\|\mathbf{n}\| \rightarrow 0$.

Особенности вычислительной реализации предложенного алгоритма. Получение оценки ННК требует поиска глобального минимума целевой функции R . На рисунке 1 показана эта функция для сигнала с $f^{(0)} = 0.2$, $a_1^{(0)} = 1$, $a_2^{(0)} = 0.003$ и $N = 32$. Для сравнения на рисунке показана также модифицированная периодограмма $R_0(f)$ (11).

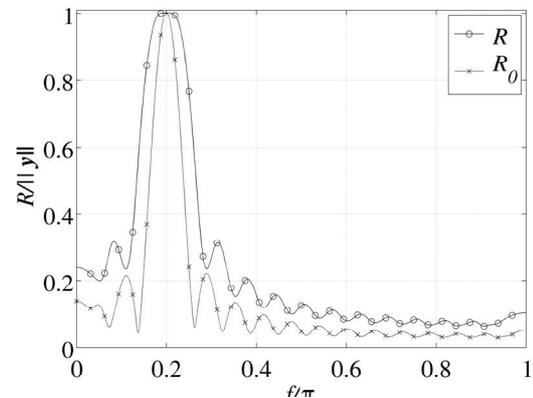


Рисунок 1 – Целевая функция оптимизации

Так как в целевой функции присутствуют локальные максимумы, первым шагом поиска точного значения глобального максимума должен стать дискретный поиск максимального значения $R(f)$ на равномерной сетке значений частоты:

$$k_{\max} = \arg \max_k R(f_k),$$

где $f_k = \pi k / N$. Затем осуществляется точный поиск максимума методом градиентной оптимизации (12). При дискретном поиске наибольших вычислительных затрат потребует вычисление скалярных произведений сигнала \mathbf{y} с базисными векторами (4) для частот f_k . Эти затраты, однако, не превышают $O(N \log N)$ в силу того, что скалярные произведения

$$\begin{aligned} \mathbf{y} \cdot \mathbf{c}(f_k), \quad \mathbf{y} \cdot \mathbf{s}(f_k), \\ \mathbf{y} \cdot \mathbf{c}'(f_k), \quad \mathbf{y} \cdot \mathbf{s}'(f_k) \end{aligned}$$

можно вычислить посредством дискретного преобразования Фурье, примененного к векторам \mathbf{y} , $\tilde{\mathbf{y}}$, где

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}} &= [\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N], \\ \tilde{y}_n &= y_n t_n \end{aligned}$$

используя векторы корректирующих фазовых множителей.

После того как дискретный поиск определил k_{\max} , полученное приближение к искомой частоте $f = \pi k_{\max} / N$ уточняется методом золотого сечения [7] в сочетании с параболической интерполяцией [8].

Численные эксперименты. Для численного исследования влияния шума методом Монте-Карло к отсчётам синусоидального линейно-модулированного сигнала добавлялся вектор псевдослучайного нормально распределённого возмущения. Подпрограмма одномерной оптимизации отыскивала минимум функционала R в интервале частот от нуля до π . Такое вычисление повторялось 300 раз для различных векторов гауссова шума с фиксированным отношением сигнал/шум. Результирующая оценка стандартного отклонения σ_1 оценки частоты f как функция отношения сигнал-шум (SNR) показана на рисунке 2. Для сравнения также показана оценка стандартного отклонения σ_0 оценки частоты методом ННК без учёта амплитудной модуляции, то есть оценки, полученной поиском максимума функционала $R_0(f)$ (11). Отношение сигнал-шум определяется как отношение квадратов норм синусоиды и аддитивного шума, что характеризует соотношение энергий сигнала и шума.

Сравнение графиков на рисунке 1 показывает, что максимум R_0 более узкий, поэтому естественно ожидать, что оценка, учитывающая амплитудную модуляцию, будет иметь большее стандартное отклонение при том же уровне шума. Это подтверждается результатами численного моделирования, представленными на рисунке 2.

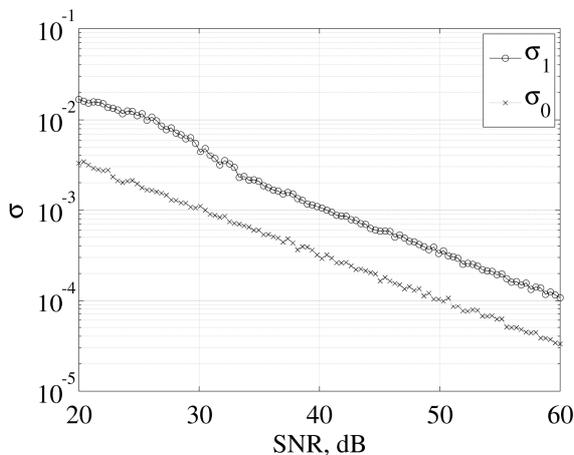


Рисунок 2 – Влияние аддитивного гауссового шума на стандартное отклонение оценки частоты

Большая чувствительность оценки ННК с учётом модуляции к шуму объясняется увеличением числа свободных параметров в модели

сигнала по сравнению с немодулированной синусоидой.

Хотя максимумы функций R и R_0 на рисунке 1 визуально совпадают, на самом деле их положения отличаются. Оценки, полученные без учёта линейной модуляции, являются смещёнными. На рисунке 3 представлены численные оценки смещения, то есть абсолютной величины отклонения средней оценки частоты от истинного значения, как функция отношения сигнал-шум. При снижении уровня шума $\delta \rightarrow 0$, то есть оценка, учитывающая возможность линейной модуляции сигнала, стремится к истинному значению частоты. В то же время оценка частоты методом ННК без учёта модуляции не совпадает с истинным значением даже в отсутствие шума, если сигнал представляет собой синусоиду с линейной амплитудной модуляцией. Оценка смещения δ_0 остаётся практически неизменной, как бы ни увеличивалось соотношение сигнал-шум.

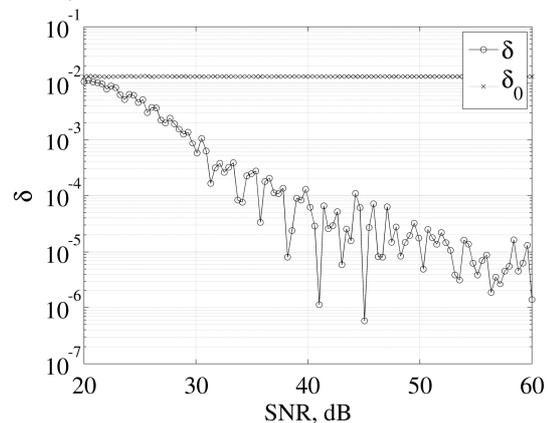


Рисунок 3 – Влияние аддитивного гауссового шума на смещение оценки частоты

Из двух сравниваемых оценок частоты оценка, учитывающая модуляцию, имеет меньшее смещение, но большую вариацию.

Рисунок 4 показывает результаты моделирования с постоянным отношением сигнал-шум SNR=40 дБ, но меняющейся частотой невозмущённого сигнала f_0 .

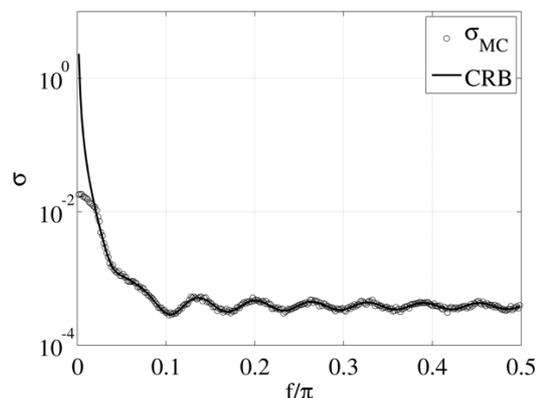


Рисунок 4 – Влияние частоты невозмущённого сигнала на стандартное отклонение оценки

Оценка методом Монте-Карло стандартного отклонения оценки частоты σ_{MC} на этом графике сравнивается с границей Крамера-Рао CRB (Cramer-Rao bound) [9]. Как показывает график, вариация оценки соответствует теоретически предсказанной, что подтверждает эффективность оценки параметров сигнала описываемым методом. Исключением является малый участок вблизи нулевой частоты, где граница Крамера-Рао стремится к бесконечности. Так как частота принимает значения в интервале $[0, \pi]$, легко видеть, что вариация оценки частоты не может стремиться к бесконечности. Как показано в [10], теоретическое описание вариации оценки частоты методом нелинейных наименьших квадратов для малых значений частоты, когда стандартное отклонение частоты становится того же порядка, что и сама частота, требует модификации несмещённой границы Крамера-Рао.

Рисунок 5 показывает результаты моделирования методом Монте-Карло с постоянным отношением сигнал-шум $\text{SNR}=40$ дБ, и частотой $f_0 = 0.3$.

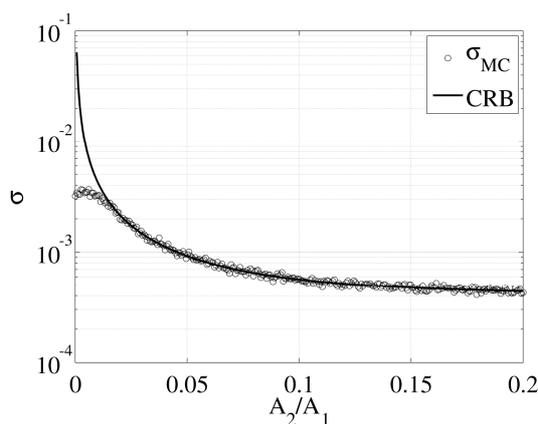


Рисунок 5 – Влияние глубины модуляции невозмущённого сигнала на стандартное отклонение оценки

Численная оценка стандартного отклонения оценки частоты соответствует предсказанию границы Крамера-Рао, кроме близких к нулю значений глубины модуляции A_2/A_1 , где несмещённая граница Крамера-Рао стремится к бесконечности. Аналогично рассмотренному выше случаю $f_0 \rightarrow 0$, это указывает на неприменимость несмещённой границы Крамера-Рао к вариации оценки частоты методом ННК с учё-

том линейной модуляции при малых значениях глубины модуляции $A_2/A_1 \rightarrow 0$.

Заключение. Продемонстрирована возможность оценки с пониженными вычислительными затратами параметров синусоидального сигнала с амплитудой, модулированной по линейному закону. Путём использования метода проекции переменных поиск оценки сводится к одномерной задаче оптимизации.

Предлагаемый метод применим как к действительным, так и к комплексным сигналам.

Как показали численные эксперименты, вариации полученных оценок и их средние отклонения от истинных значений соответствуют теоретически предсказанным с помощью границы Крамера-Рао. Это свидетельствует, что предлагаемый алгоритм позволяет получать асимптотически эффективные оценки параметров сигнала при наличии линейной амплитудной модуляции.

Работа выполнена при поддержке Соглашения о предоставлении субсидии №14.574.21.0012 (УНК RFMEFI57414X0012).

Библиографический список

1. Stoica P., Moses R.L. Spectral analysis of signals. Pearson/Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 2005.
2. Besson O., Stoica P. Nonlinear least-squares approach to frequency estimation and detection for sinusoidal signals with arbitrary envelope // Digit. Signal Process. 1999. Vol. 9, No. 1. pp. 45–56.
3. Golub G.H., Pereyra V. The Differentiation of Pseudo-Inverses and Nonlinear Least Squares Problems Whose Variables Separate // SIAM J. Numer. Anal. 1973. Vol. 10, No. 2. pp. 413–432.
4. Golub G., Pereyra V. Separable nonlinear least squares: the variable projection method and its applications // Inverse Probl. 2003. Vol. 19, No. 2. pp. R1–R26.
5. Vaníček P. Approximate spectral analysis by least-squares fit // Astrophys. Space Sci. 1969. Vol. 4, No. 4. pp. 387–391.
6. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Эконометрика. М.: Юнити-Дана, 2002.
7. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация, 1985.
8. Brent R.P. Algorithms for minimizing without derivatives. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.
9. Kay S.M. Fundamentals of statistical signal processing: estimation theory. 1993.
10. Кагаленко М.Б. Точность оценки частоты гармонического сигнала методом нелинейных наименьших квадратов // Цифровая Обработка Сигналов. 2012. № 1. С. 76–80.