Задачи студенческих математических олимпиад
Рязанского государственного радиотехнического университета (РГРТУ)

9 апреля 2016 (*межрегиональная*)

Задача 1. *Вычислить* $\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}$.

Решение.

$$\sin^4\frac{\pi}{16}+\cos^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\cos^4\frac{3\pi}{16}=$$
$$=\Big(\sin^2\frac{\pi}{16}+\cos^2\frac{\pi}{16}\Big)^2-2\sin^2\frac{\pi}{16}\cos^2\frac{\pi}{16}+\Big(\sin^2\frac{3\pi}{16}+\cos^2\frac{3\pi}{16}\Big)^2-2\sin^2\frac{3\pi}{16}\cos^2\frac{3\pi}{16}=$$
$$=2-\frac{1}{2}\Big(\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}\Big)=2-\frac{1}{2}\Big(\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}\Big)=\frac{3}{2}.$$

Задача 2. *Пусть квадратные матрицы из действительных чисел A и B такие, что*

$$A^{-1}+B^{-1}=(A+B)^{-1}.$$

1) Предложить матрицы A и B, удовлетворяющие этому уравнению;
2) Доказать, что $\det A=\det B$.

Решение. Так как по условию

$$E=(A+B)(A+B)^{-1}=(A+B)(A^{-1}+B^{-1})=AA^{-1}+AB^{-1}+BA^{-1}+BB^{-1}\Longrightarrow AB^{-1}+BA^{-1}+E=0.$$

Обозначим $X=AB^{-1}$. Тогда $X+X^{-1}+E=0$. Умножив последнее уравнение на $(X-E)X$ слева, получим:

$$0=(X-E)X(X+X^{-1}+E)=(X-E)(X^2+X+E)=X^3-E\Longrightarrow X^3=E\Longrightarrow \det X=\frac{\det A}{\det B}=1.$$

Пример: $A=E$, $B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$ (матрица оператора поворота на 120^o).

Задача 3. *Доказать, что* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}<2$.

Решение. Докажем, что $\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}\le\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}}$. Умножим обе части на $\sqrt{n}(n+1)$, получим $1\le 2(n+1)-2\sqrt{n(n+1)}$. То есть, $2\sqrt{n(n+1)}\le 2n+1=n+(n+1)$. Что очевидно: $\sqrt{n(n+1)}\le\frac{n+(n+1)}{2}$. Тогда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}<\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}}\Big)=2.$$

Задача 4. *Разложить функцию $f(x) = e^x \cos x$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x = 0$. Рассчитать коэффициент a_{2016} при x^{2016}.*

Решение. По формуле Эйлера: $e^x \cos x = \operatorname{Re} e^{(1+i)x}$, и поскольку $\operatorname{Re}(1+i)^n = 2^{n/2} \cos \frac{\pi n}{4}$, получаем $e^x \cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2}}{n!} \cos \frac{\pi n}{4} x^n$.

Ответ: $a_{2016} = \dfrac{2^{1008}}{2016!}$.

Задача 5. *Найти пределы: а)* $\lim\limits_{x\to 0} \left(3^x + x\right)^{1/\sin x}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right)^{1/\ln\cos x}$; *в)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$.

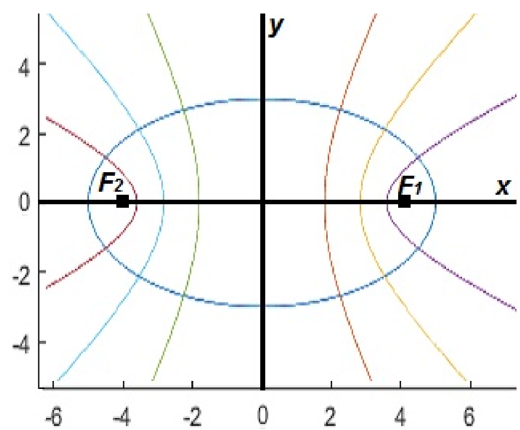
Решение. Используем разложения

$$3^x = 1 + x\ln 3 + o(x), \quad \ln\cos x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \arcsin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad \operatorname{arctg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Ответ: а) $3e$; б) e^{-2}; в) $1/2$.

Задача 6. *Дан эллипс* $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.
1) Предложить уравнение гиперболы, имеющее такие же координаты фокусов;
2) Показать, что таких гипербол бесконечно много;
3) Показать, что эти гиперболы ортогональны данному эллипсу.

Решение. Из уравнения эллипса получаем координаты фокусов $F_{1,2}(\pm 4; 0)$ и эксцентриситет $\varepsilon = 4/5$. Пусть искомая гипербола имеет вид $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Тогда $a^2 + b^2 = 16$. Таких гипербол бесконечно много.



Пусть $M_o(x_o; y_o)$ — точка пересечения эллипса и гиперболы. Уравнения касательных для этих кривых в M_o имеют вид

$$(*) \quad \begin{cases} \dfrac{xx_o}{25} + \dfrac{yy_o}{9} = 1 \\ \dfrac{xx_o}{a^2} + \dfrac{yy_o}{16 - a^2} = 1 \end{cases} \quad \text{с угловыми коэффициентами} \quad k_1 = -\frac{9x_o}{25y_o}, \quad k_2 = -\frac{(16 - a^2)x_o}{a^2 y_o}.$$

Далее, из системы уравнений $(*)$ получаем

$$\frac{x_o^2}{y_o^2} = \frac{25a^2}{9(16 - a^2)} \Longrightarrow k_1 k_2 = -\frac{(16 - a^2)x_o}{a^2 y_o} \frac{9x_o}{25y_o} = -1.$$

Задача 7. *Найти все корни уравнения* $z^{2016} = 2016^{2016}$.

Решение. Уравнение имеет ровно 2016 корней с учетом кратных и комплексных корней: $z_k = 2016\Big(\cos\dfrac{2\pi k}{2016} + i\sin\dfrac{2\pi k}{2016}\Big)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 2015$.

Задача 8. *Накануне Рио-де-Жанейро-2016 решено проверить всех спортсменов на употребление мельдония. Современные методы позволяют обнаружить мельдоний, даже если анализируется смесь проб нескольких спортсменов. Поэтому, чтобы уменьшить количество проб и расходы, было предложено смешивать пробы k спортсменов, и если проба дала отрицательный результат, то все спортсмены допущены к соревнованиям. Если же результат допинг-пробы положительный, берётся ещё по пробе у каждого. Найти оптимальную численность группы k, если вероятность того, что спортсмен принимал мельдоний 1/4. Считать, что число спортсменов достаточно велико.*

Решение. Для каждого спортсмена вероятность того, что в группе из k спортсменов, в которую он попал, получится отрицательная проба, равна $(3/4)^k$. Тогда средняя экономия на 1 спортсмена будет $f(k) = (3/4)^k - 1/k$, она имеет максимум при $k = 3$.

Задача 9. *При каких значениях параметра a предел* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\,\mathrm{tg}(x/a) + \sin x - 2x}{x^5}$ *будет конечным и ненулевым? Найти этот предел.*

Решение. Разложим функции $\sin x$ и $\mathrm{tg}\, x$ по формуле Тейлора:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6), \qquad \mathrm{tg}\, x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6).$$

Тогда

$$a\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{a} = a\Big(\frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{2x^5}{15a^5} + o(x^6)\Big) = x + \frac{x^3}{3a^2} + \frac{2x^5}{15a^4} + o(x^6).$$

Для того, чтобы предел был конечным и ненулевым, необходимо, чтобы коэффициент в числителе при x^5 был отличен от 0, а коэффициенты при меньших степенях были 0. Отсюда получим:

$$a\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{a} + \sin x - 2x = x + \frac{x^3}{3a^2} + \frac{2x^5}{15a^4} + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6) = x^3\Big(\frac{1}{3a^2} - \frac{1}{6}\Big) + x^5\Big(\frac{2}{15a^4} + \frac{1}{120}\Big) + o(x^6).$$

Тогда $\dfrac{1}{3a^2} - \dfrac{1}{6} = 0 \Longrightarrow a = \pm\sqrt{2}$. Тогда $\dfrac{2}{15a^4} + \dfrac{1}{120} = \dfrac{2}{60} + \dfrac{1}{120} = \dfrac{1}{24}$.

Ответ: $\lim = \dfrac{1}{24}$ при $a = \pm\sqrt{2}$.

Задача 10. *Найти производные* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, *если*[1] $z = \sqrt{x^2+y^2}\,\ln\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Решение. Перепишем функцию в виде $F(x,y,z) = \ln\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$. Представим F как сложную функцию $F(x,y,z) = g(\Phi(x,y,z))$, где $g(t) = t - e^t$, $\Phi(x,y,z) = \ln\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} =$

[1] Это „задача-ловушка“: неявно заданная функция не имеет точек существования. Если студенты указали в решении, что функция не существует, то они получают дополнительные баллы за задачу.

$\ln z - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{\partial \Phi/\partial x}{\partial \Phi/\partial z} = -\frac{x/(x^2+y^2)}{1/z} = \frac{xz}{x^2+y^2},$$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ вычисляется аналогично.

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{xz}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{yz}{x^2+y^2}$.

Задача 11. *Вычислить площадь фигуры, заданной условиями:* $x^2+y^2 \le 25$, $|y| \le 5-\sqrt{|x|}$.

Решение. Очевидно, фигура симметрична относительно осей координат, поэтому $S = 4S_1$, где S_1 — площадь фигуры в первой четверти. Точка пересечения линий $x^2+y^2=25$ и $y = 5-\sqrt{x}$ — точка $(4;3)$. Получим:

$$S_1 = \int\limits_0^4 5-\sqrt{x}\,dx + \int\limits_4^5 \sqrt{25-x^2}dx = \left(5x - \frac{2}{3}x^{3/2}\right)\Big|_0^4 + \left(\frac{25}{2}\arcsin\frac{x}{5} + \frac{x}{2}\sqrt{25-x^2}\right)\Big|_4^5 =$$

$$= \frac{25\pi}{4} - \frac{25}{2}\arcsin\frac{4}{5} + \frac{26}{3}.$$

Ответ: $S = 25\pi - 50\arcsin\frac{4}{5} + 104/3$.

Задача 12. *Вычислить интегралы:*

$$а)\ \int\limits_0^{4\pi} x\,\mathrm{sign}\sin x\,dx; \qquad б)\ \int\limits_0^{4\pi} x[\cos x]dx; \qquad в)\ \int\limits_0^{\pi} [x]\mathrm{sign}\,\mathrm{tg}\,x\,dx.$$

Здесь $[a]$ *— целая часть числа* a, $\mathrm{sign}\,b$ *— знак числа* b.

Решение.

$$\text{а)}\quad \int\limits_0^{4\pi} x\,\mathrm{sign}\,\sin x\,dx = \left(\int\limits_0^{\pi} - \int\limits_{\pi}^{2\pi} + \int\limits_{2\pi}^{3\pi} - \int\limits_{3\pi}^{4\pi}\right)x\,dx = \frac{1}{2}\left(x^2\Big|_0\pi - x^2\Big|_{\pi}^{2\pi} + x^2\Big|_{2\pi}^{3\pi} - x^2\Big|_{3\pi}^{4\pi}\right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{2}\big((1-0)-(4-1)+(9-4)-(16-9)\big) = -2\pi^2.$$

$$\text{б)}\quad \int\limits_0^{4\pi} x[\cos x]dx = \int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} x\cdot(-1)dx + \int\limits_{5\pi/2}^{7\pi/2} x\cdot(-1)dx = -\frac{x^2}{2}\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} - \frac{x^2}{2}\Big|_{5\pi/2}^{7\pi/2} =$$

$$= -\frac{\pi^2}{8}\big((9-1)+(49-25)\big) = -4\pi^2.$$

$$\text{в)}\quad \int\limits_0^{\pi} \mathrm{sign}\ \mathrm{tg}\,x\,dx = \int\limits_1^{\pi/2} 1\,dx + \int\limits_{\pi/2}^{2} (-1)dx + \int\limits_2^{3} (-2)dx + \int\limits_3^{\pi} (-3)dx =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}-1\right) - \left(2-\frac{\pi}{2}\right) - 2 - 3(\pi-3) = 4-2\pi.$$

Задача 13. *1. Показать, что функция* $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ *удовлетворяет функциональному уравнению* $f(x)f(y\,f(x)) = f(x+y)$ *для любых* $x, y \in [0, +\infty)$.
2. Найти все дифференцируемые функции $f:\ [0,+\infty) \mapsto [0,+\infty)$, *удовлетворяющие данному функциональному уравнению для любых* $x, y \in [0, +\infty)$.

Решение. Перепишем условие в виде

$$\frac{f(x+y) - f(x)}{y} = f^2(x)\frac{f(y\,f(x)) - 1}{y\,f(x)}.$$

Переходя к пределу при $y \to 0+0$, получим

$$f'(0) = f^2(x) \lim_{y\to 0+0} \frac{f(y\,f(x)) - 1}{y\,f(x)} = f^2(x)\cdot(-a) \Longrightarrow \Big(\frac{1}{f(x)}\Big)' = a \Longrightarrow f(x) = \frac{1}{ax+b},$$

где из начальных условий следует $a \geq 0$, $b = 1$.

Задача 14. *Решить дифференциальное уравнение* $x^3(xy)'' - 4x^2y' + 3y = 0$. *Указание: использовать замену* $t = 1/x$.

Решение. Замена $t = 1/x$, получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx} = -x^{-2}\frac{dy}{dt}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dt}\,\frac{d^2t}{dx^2} + \frac{d^2y}{dt^2}\Big(\frac{dt}{dx}\Big)^2 = -2x^{-3}\frac{dy}{dt} + x^{-4}\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Тогда $x^2y' = -dy/dt$, $x^3(xy)'' = x^3(2y' + xy'') = d^2y/dt^2$. В итоге исходное уравнение имеет вид $\ddot{y} + 4\dot{y} + 3y = 0$, с решением $y(t) = C_1e^{-3t} + C_2e^{-t}$.

Ответ: $y(x) = C_1e^{-3/x} + C_2e^{-1/x}$.

Задача 15. *Сборная России по футболу насчитывает 28 человек, каждый из которых является рыцарем (всегда говорит правду) или лжецом (всегда лжёт). Во время пресс-конференции у каждого спросили, сколько в сборной рыцарей. 1-й сказал: „Число рыцарей — делитель 1". 2-й сказал: „Количество рыцарей — делитель 2" и т. д. до 28-го, который сказал: „Количество рыцарей — делитель 28". Определите, сколько в сборной России рыцарей.*

Решение. Может ли в сборной не быть рыцарей? Да. В этом случае все 28 членов сборной солгали бы, так как 0 вообще не делитель.

Может ли в сборной быть ровно k рыцарей? В этом случае правду сказали бы $[28/k]$. Из чисел $1, 2, 3, \ldots, 28$ равенству $k = [28/k]$ удовлетворяет только $k = 5$.

Ответ: 0 или 5 рыцарей.