

О.В. Пальчик

## ФИЛЬТРАЦИЯ ОДИНОЧНОГО ИМПУЛЬСА СОВМЕСТНО С ОЦЕНКОЙ ПОЛОЖЕНИЯ ЕГО ЭКСТРЕМУМА

*Рассматривается актуальный в радиотехнике вопрос оценки временного положения одиночного импульса в составе сигнала ограниченной протяжённости; проанализирована процедура низкочастотной фильтрации сигнала. Предложена совместная с низкочастотной фильтрацией процедура оценки положения импульса, основанная на дифференцирующем свойстве фильтров с нечётной импульсной характеристикой.*

**Вводные замечания.** Как известно, положение экстремума определяется пересечением производной нулевого уровня. Применение этого очевидного подхода для экспериментальных данных часто затруднено, т.к. вследствие наличия шума в составе исходных данных имеет место множество пересечений с нулевым уровнем. Поэтому приходится применять фильтрацию сигнала и накладывать какие-либо ограничения на характер сигнала.

Таким ограничением может быть требование унимодального описания формы сигнала, т.е. в виде одиночного импульса в составе ограниченного по длительности массива данных. Подобное сужение класса сигналов согласно приведённому ограничению не носит чисто теоретический характер, а имеет прикладное значение: в обработке фотоизображений небесных тел (их локализации на изображении), в лазерной триангуляционной дальнометрии и т.п.

Удачным техническим приёмом является совмещение низкочастотной фильтрации и процедуры, близкой к дифференцированию. Если необходимость именно низкочастотной фильтрации определяется формой сигнала (одиночный импульс), то вторая задача – дифференцирование – может быть выполнена тем же фильтром нижних частот (ФНЧ) с нечётной импульсной характеристикой (ИХ). Отметим, что нечётность ИХ также обеспечивает линейность фазовой характеристики фильтра, что исключает нерегулярное смещение экстремума, вызванного фазовыми искажениями сигнала при прохождении фильтра.

**Целью работы** являются определение возможных форм нечётной ИХ и получение количественных характеристик оценки положения импульса в сравнении с известными подходами, а именно с оптимальным и популярным методом центра тяжести (ЦТ).

**Анализ фильтрации.** Процедура фильтрации в общем виде записывается в виде линейной

свёртки сигнала и ИХ фильтра бесконечной длины. Или с учётом названного выше накладываемого ограничения (ограниченная длительность сигнала):

$$w[j] = \sum_{k=0}^{N-1} g[k] \cdot s[j-k], \quad (1)$$

где  $N$  – конечное,  $j = -N \dots N$ ;  $\mathbf{g} = \{g[k]\}$  – вектор отсчётов ИХ;  $\mathbf{s} = \{s[j-k]\}$  – входной сигнал, представленный  $N$  значащими отсчётами в пределах  $0 \leq (j-k) < N$ , т.е. при  $(j-k) \geq N$  или  $(j-k) < 0$  полагается, что  $s[j-k] = 0$ .

В матричном виде свёртка (1) записывается в виде  $\mathbf{w} = \mathbf{S}\mathbf{g}$ , где  $\mathbf{w} = \{w[k]\}$ ,  $\mathbf{S} = \{s[j, k]\}$  – матрица, состоящая из отсчётов сигнала в линии задержки фильтра либо нулей:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} s[0] & \dots & 0 \\ s[1] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ s[N-1] & \dots & s[0] \\ 0 & s[N-1] & s[1] \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & s[N-1] \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g[0] \\ g[1] \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ g[N-2] \\ g[N-1] \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Как видно из выражения (2), сигнал на выходе фильтра имеет  $2N$  отсчётов, т.е.  $N$  отсчётов при потактовом вхождении значащих отсчётов сигнала  $\mathbf{s}$  в линию задержки фильтра и  $N$  отсчётов при выходе сигнала  $\mathbf{s}$  из фильтра. На рисунке 1 штриховкой показана область индексов, в которой осуществляется вычисление свёртки (1) для момента времени  $k = N/2$ ; сплошной линией показан входной сигнал  $\mathbf{s}$  в различных областях: на входе линии задержки фильтра, полностью в её пределах и на её выходе; ниже длинным пунктиром показана произвольная нечётная ИХ  $\mathbf{g}$  (опустим пока рассуждения о форме ИХ, ограничившись тем условием, что она является нечётной функцией своего аргумента).

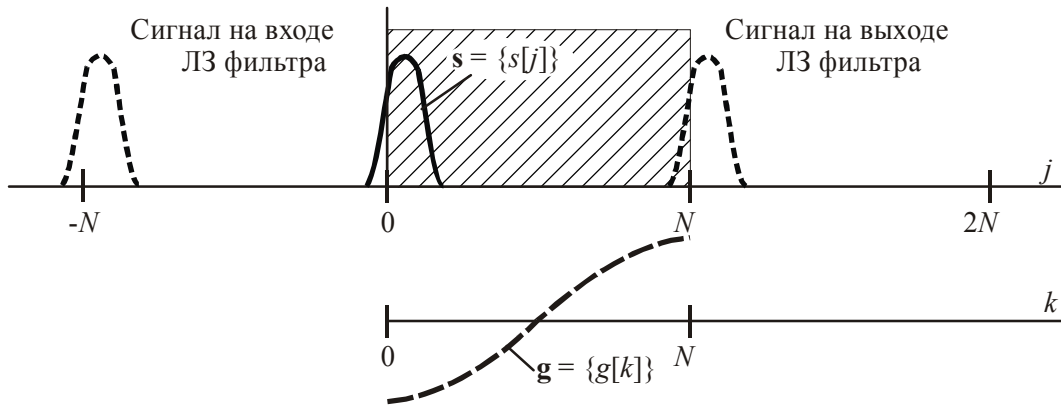


Рисунок 1

Представим прямоугольную  $2N \times N$  матрицу  $S$  в виде двух квадратных матриц  $S_1$  и  $S_2$ :

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix},$$

где

$$S_1 = \begin{bmatrix} s[0] & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s[1] & s[0] & 0 & \dots & 0 \\ s[2] & s[1] & s[0] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s[N-1] & s[N-2] & s[N-3] & \dots & s[0] \end{bmatrix},$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} 0 & s[N-1] & s[N-2] & \dots & s[1] \\ 0 & 0 & s[N-1] & \dots & s[2] \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & s[N-1] \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Из анализа структуры матриц  $S_1$  и  $S_2$  видно, что их элементы дополняют друг друга, т.е. нулевым элементам матрицы  $S_1$  соответствуют ненулевые элементы матрицы  $S_2$  и наоборот. Поэтому без потери информации можно перейти к более компактной записи в виде циклической свёртки:

$$\mathbf{v} = \mathbf{s} \otimes \mathbf{g} = (S_1 + S_2)\mathbf{g} = C\mathbf{g} \quad (3)$$

или в традиционной форме:

$$v[j] = \sum_{k=0}^{N-1} g[k] \cdot s[(j-k) \bmod N], \quad (4)$$

где  $j = 0 \dots N-1$ ,  $\mathbf{v} = \{v[j]\}$ .

Запись (4) подтверждает, что фильтр с нечётной ИХ имеет дифференцирующие свойства, что иллюстрируется крайним случаем – переходом нечётной ИХ к виду только двух значащих отсчётов одинаковых по модулю, но противоположных по знаку  $\{+1, -1\}$  (см. сплошную ИХ на рисунке 2), являющихся соседними в силу цикличности процедуры (4).

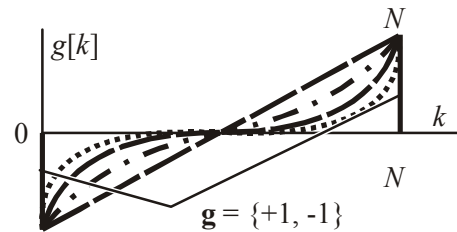


Рисунок 2

Представим выражение (4) как два слагаемых и, заменив пределы суммирования, с учётом нечётности  $\mathbf{g}$  получим:

$$v[j] = \sum_{k=0}^{N/2-1} g[k] \cdot (s[(j-k) \bmod N] - s[(N/2 - (j-k)) \bmod N]) \quad (5)$$

Выражение (5) показывает, что принципиального значения форма  $\mathbf{g}$  не имеет, и влияет она только на вид функциональной зависимости расогласования площадей  $S_+$  и  $S_-$  сигнала до и после индекса  $N/2$  от положения экстремума сигнала  $\mathbf{s}$  (см. рисунок 3):

$$\hat{M} \cong S_+ - S_-, \quad (6)$$

где  $S_+ = \sum_{j=0}^{N/2-1} s[j]$ ,  $S_- = \sum_{j=0}^{N/2-1} s[N/2 + j]$ .

Т.е. в записи (4) функция  $g[k]$  имеет смысл *дискриминационной характеристики*. В частности, свёртка (4) для  $j=0$  характеризует отклонение сигнала  $\mathbf{s}$  от среднего положения  $N/2$ , и для линейной  $\mathbf{g}$  оценка (6) совпадает с известным частным решением в виде центра тяжести импульса [1].

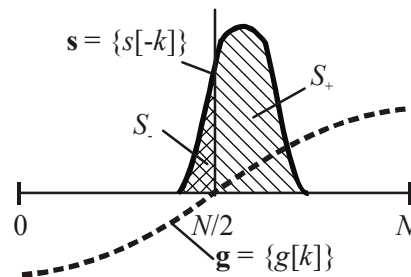


Рисунок 3

Таким образом, основываясь на процедуре низкочастотной фильтрации, представляется возможным не только естественным образом снизить влияние шумов, но и косвенно (не математическим выражением, а алгоритмически – как координату пересечения свёртки с нулевым уровнем) оценить положение экстремума по выражению (6), точный вид которого зависит от формы дискриминационной характеристики  $g$ .

**Оценка положения экстремума.** Показанные на рисунке 2 характеристики  $g$  различной формы с увеличением выпуклости вверх приводят свёртку (4) ближе к производной сигнала, что неприемлемо согласно постановке задачи. Поэтому  $g$  в интервале  $k = 0 \dots N/2 - 1$  [2] целесообразно описывать в виде выпуклой вниз гладкой степенной функции с параметром формы  $h$ :

$$g[j] = \frac{N}{2} h \sqrt{1 - \frac{2j}{N}},$$

где  $h$  – натуральное число и  $h \neq 0$ . Варьируя параметром  $h$ , кривой  $g$  можно придавать формы от линейной до практически прямоугольной (см. рисунок 4). В диапазоне  $k = N/2 \dots N - 1$   $g$  получается как  $g[k] = -g[N - 1 - k]$ .

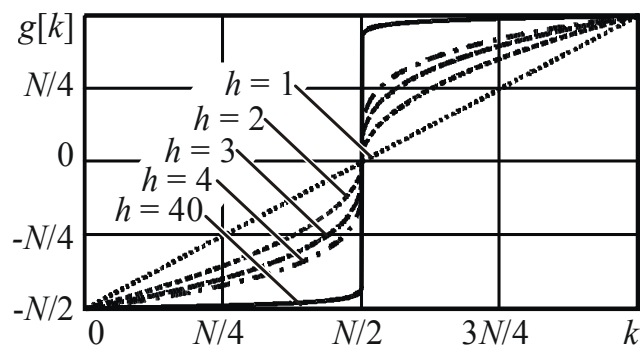


Рисунок 4

На рисунке 5 показан результат вычисления свёртки для различных  $h$  гауссова импульса (положение центра импульса  $M = N/2$ ), а также производная сигнала. Из рисунка видно, что поиск экстремума по производной сигнала затруднителен, т.к. требуется достаточно сложный анализ (например, по автокорреляции, по результатам предварительной пороговой обработки и т.п.) чтобы выделить участок сигнала, соответствующий импульсу.

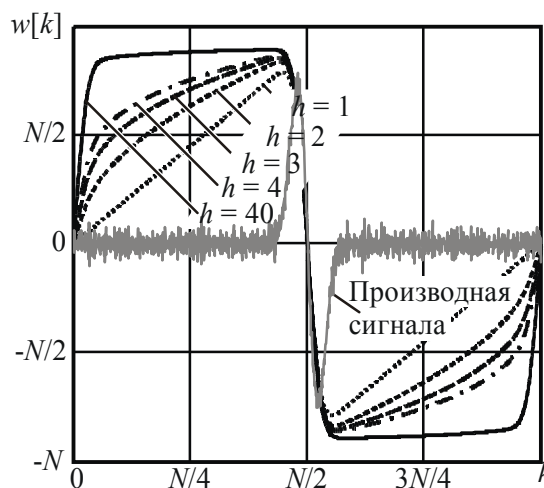


Рисунок 5

В работе [3] приведена графическая интерпретация рассмотренного результата преобразования сигнала согласно (4) и показано принципиальная разница выделения одной информации методом ЦТ и косвенно. При этом положение экстремума симметричного импульса произвольной формы находилось как значение абсциссы точки пересечения циклической свёртки с её средним уровнем, что автоматически учитывает возможный ненулевой постоянный уровень сигнала вне ограниченных пределов  $\Delta j$  импульса (т.е. кроме импульса длительностью  $\Delta j$  во входной аддитивной смеси кроме шумов может присутствовать постоянная составляющая, что часто имеет место на практике).

На рисунке 6 приведены зависимости среднеквадратического отклонения (СКО) оценок  $\sigma_{\text{оц}}$  положения импульса от относительной ширины импульса  $\Delta j/N$  при амплитуде импульса  $A = 1$  и интенсивности аддитивного белого шума: а)  $\sigma_f = 0,05$ ; б)  $\sigma_f = 0,1$ ; в)  $\sigma_f = 0,2$ . Сплошной линией показана зависимость СКО оценки метода центра тяжести (с оптимальным порогом  $q = 5\sigma_f$  [4]), длинным пунктиром – СКО оценки оптимального метода, а коротким пунктиром – СКО оценки по предлагаемому косвенному подходу.

Как видно из рисунка 6, при узком импульсе косвенный алгоритм проигрывает как оптимальному методу, так и методу центра тяжести с предварительной пороговой обработкой при наилучшем пороге. Однако при расширении импульса оценки по косвенному алгоритму стремятся к оптимальным.

Относительный выигрыш косвенной оценки у метода ЦТ для приведенного примера при относительной ширине  $\Delta j/N = 0,2$  составляет 15...60%. Выигрыш для некоторых форм импульса, отличных от гауссианы [4], с фиксированной амплитудой  $A$  и неоптимальным порогом

может достигать 3...5 раз. Так для, для типичной в триангуляционных системах ширины импульса  $\Delta j/N = 0,07...0,13$  [4] выигрыш достигает 2...4 раза.

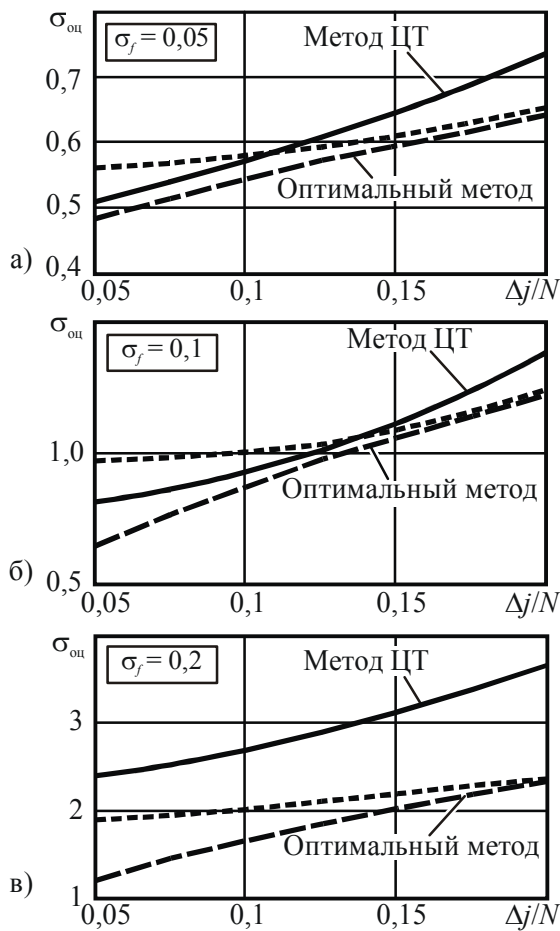


Рисунок 6

Предлагаемая косвенная оценка положения экстремума проигрывает классическому подходу, основанному на дифференцировании, пренебрежительно мало (десятые доли процента), что обусловлено близкими значениями крутизны компарируемых сигнала  $w$  и производной вблизи экстремума импульса (см. рисунок 5).

**Выводы.** Отметим, что несмотря на явную схожесть предлагаемого косвенного алгоритма с поиском перехода через ноль производной сигнала, в данном подходе есть принципиальные отличия.

Во-первых, со средним уровнем есть только два пересечения, отстоящие на  $N/2$  друг от друга даже при наличии шумов (нужное пересечение выбирается по знаку  $v$  до и после точки пересечения [3]). В то же время отношение сигнал/шум свёртки (4) значительно выше, чем у входной смеси импульса и шумов, что обусловлено низкочастотной фильтрацией на этапе вычисления свёртки (4).

Во-вторых, все участки свёртки далеко отстоят от среднего уровня (см. рисунок 5), что повышает помехоустойчивость косвенного алгоритма оценивания положения экстремума [3] по сравнению с обработкой производной сигнала. Это исключает необходимость предварительной локализации импульса и применения пороговой обработки с целью исключения ложных переходов через ноль вне области импульса шириной  $\Delta j$ .

Практическая реализуемость устройства, выполняющего вычисление свёртки (4) и обнаружение перехода её через средний уровень, обусловлена возможностью рекурсивного преобразования циклической свёртки [5]. Для ряда нелинейных форм дискриминационной характеристики  $g$ , а также и для линейной формы подобное преобразование позволяет существенно сократить число арифметических операций при приемлемой погрешности. Так, при  $N = 1024$  циклическая свёртка импульса с линейной  $g$  требует только по одному умножению и одному суммированию после получения всех  $N$  отсчетов входного сигнала. Смещение оценки положения экстремума импульса вследствие искажения свёртки при рекурсивном преобразовании линейной  $g$  на практике являются пренебрежительно малым.

#### Библиографический список

1. Пальчик О.В., Горкин В.Н. Обобщение интегральных методов оценки положения импульса методом циклической свёртки // Информационные технологии моделирования и управления. – 2005. – № 3(21). – С. 375-383.
2. Венедиктов А.З., Пальчик О.В. Параметрическая оптимизация алгоритма оценивания положения одиночного видеоимпульса // Цифровая обработка сигналов и ее применения: Материалы докладов VII международной конференции. – Москва, 2005. – Т. II. – С. 283-285.
3. Пальчик О.В., Андреев В.Г. Обработка данных триангуляционного измерителя // Цифровая обработка сигналов и ее применения: Материалы докладов VI международной конференции. – Москва, 2004. – Т. II. – С. 197-200.
4. Андреев В.Г., Пальчик О.В. Теоретико-экспериментальное исследование лазерных триангуляционных измерителей (депонированная рукопись) / Рязан. гос. радиотехн. академия. – Рязань, 2004. – 17 с. – 5 ил. – Библиогр.: 7 назв. – Рус. – Деп. в ВИМИ, 12.10.2004, №Д08974.
5. Андреев В.Г., Пальчик О.В. Метод нахождения энергетического центра одиночного импульса // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 2005. – Т. 48. – № 7. – С. 47-55.