УДК 621.391.1:519.713:681

В.В. Тарасов

К ПРОБЛЕМЕ ВЫРАЗИМОСТИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ ФОРМУЛАМИ НАД БАЗИСОМ ИЗ СЛУЧАЙНЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

На основе расширений классов Поста, содержащих константы, исследуются условия выразимости функций алгебры логики формулами над базисом из случайных булевых функций.

1. Введение. Будем рассматривать множество $\widetilde{P}_2$ всех частично ненадежных булевых функций, т.е. $f(\widetilde{x}) \in \widetilde{P}_2$ тогда и только тогда, когда для любого набора $\widetilde{\alpha}$ из $\{0,1\}^n$ значение $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ равно 0,1 или $f(\widetilde{\alpha})$ является случайной булевой величиной. Если предполагается возможность, что существует набор $\widetilde{\alpha}$ такой, что $f(\widetilde{\alpha})$ – случайная величина, то функцию $f(\widetilde{x})$ будем называть случайной булевой функцией (СБ–функцией), в противном же случае $f(\widetilde{x})$ – просто булева функция, т.е. $f(\widetilde{x}) \in P_2$. Обозначим через $\mathrm{Re}[f(\widetilde{x})]$ множество всех реализаций (функций неисправности) СБ–функции $f(\widetilde{x})$. Аналогично, если $(\xi_1,\ldots,\xi_n)^T$ – столбец с возможным содержанием булевых случайных величин, то через $\mathrm{Re}[\xi_1,\ldots,\xi_n]^T$ обозначим множество всех реализаций случайного столбца $(\xi_1,\ldots,\xi_n)^T$. Переменная x_i СБ–функции $f(\widetilde{x})$ называется существенной переменной, если множество $\mathrm{Re}[f(\widetilde{x})]$ содержит булеву функцию, существенно зависящую от переменной x_i, в противном случае переменная x_i называется фиктивной. Термальной (формульной) суперпозицией над системой (базисом) $N\left(N \subseteq \widetilde{P}_2\right)$ будем называть любую функцию, полученную из данной путем переименования и отождествления переменных, введения или изъятия фиктивных переменных, а также бесповторную подстановку СБ–функций над базисом N в СБ–функцию базиса N (ср. с определением ф–квазисуперпозицией в [1] и убедитесь в содержательной эквивалентности этих двух определений). СБ–функции $f(x_1,\ldots,x_n)$, $g(x_1,\ldots,x_n)$ могут считаться равными только в случае, когда они представляют один источник. Для любой системы случайных булевых величин (столбцы, строки, функции) $\xi_1,\ldots,\xi_r$, составленной из случайных величин СБ–функций базиса, множество $\mathrm{Re}[\xi_1,\ldots,\xi_r]$ содержит все 2^r булевых реализаций. Вопрос о зависимости и независимости случайных величин является несущественным для термальной суперпозиции и учитываться нигде здесь не будет. Два случайных столбца $(\xi_1,\ldots,\xi_k)^T,(\eta_1,\ldots,\eta_k)^T$ называются однотипными, если для любого i, $1 \le i \le k$, либо $\xi_i = \eta_i = \alpha \in \{0,1\}$, либо ξ_i и η_i – случайные величины.

В дальнейшем мы используем для классов Поста терминологию и обозначения, данные в [3]. Составим перечень классов Поста, требующихся для решения наших задач:

1) A_1 – класс всех монотонных булевых функций;

2) L_1 – класс всех линейных булевых функций;

3) D_3 – класс всех самодвойственных булевых функций;

4) C_2 – класс всех функций, сохраняющих 1;

5) C_3 – класс всех функций, сохраняющих 0;

6) $C_4 = C_2 \cap C_3$;

7) P_6 – класс всех функций, порожденных системой $\{0,1,xy\}$;

8) S_6 – класс всех функций, порожденных системой $\{0,1,x \vee y\}$;

9) O_8 – класс всех функций, порожденных системой $\{0,1,x\}$;

10) O_9 – класс всех функций, порожденных системой $\{0,\overline{x}\}$.

Пусть B – один из классов Поста. Расширением класса B назовем любую подалгебру $U(B)$ $(U(B) \subseteq P_2)$, содержащую B. Расширение $U(B)$ назовем B–максимальным, если для любой СБ–функции $f(\widetilde{x}) \in \widetilde{P}_2$ такой, что $f(\widetilde{x}) \notin U(B)$, система $\{f\} \cup B$ строит некоторую булеву функцию h, не принадлежащую B.

Нетрудно доказать от противного (как это сделано, например, в [4]), что если для класса Поста B существует B–максимальное расширение, то оно единственное. Однако, как это будет видно далее, некоторые классы Поста (например, O_9) могут быть расширены до максимальных, но не являющихся B–максимальными. В таких случаях вместо желаемого B–максимального класса возникнет *достаточная* система максимальных классов, заменяющая функционально B–максимальный класс, т.е. система СБ–функций, целиком не содержащаяся ни в одном из классов достаточной системы, порождает булеву функцию $h \notin B$.

2. Цель работы: исследование функциональных возможностей стохастических функциональных базисов в реализации булевых функций термальной (формульной) суперпозицией в случае, когда для элементов базиса известны все входовые булевы комбинации, в которых значения могут быть вычислены вполне надёжно (0 или 1), а на остальных входовых комбинациях, при которых элемент базиса работает ненадёжно (находится в состоянии сбоя), т.е. выпускает случайную булеву величину, характеристики распределения которой неизвестны.

3. B–максимальные расширения для классов Поста A_1, L_1, D_3, P_6, S_6.

Определение 1. *СБ–функция* $f(\tilde{x})$ *s–сохраняет предикат* $R(y_1,\ldots,y_k)$, *если для любой булевой матрицы* $\left(\tilde{\sigma}^1,\ldots,\tilde{\sigma}^n\right)^T$, *столбцы которой удовлетворяют предикату* $R(\tilde{y})$, *множество* $\mathrm{Re}\left[f\left(\tilde{\sigma}^1\right),\ldots,f\left(\tilde{\sigma}^n\right)\right]$ *содержит столбец, удовлетворяющий предикату* $R(\tilde{y})$.

При таком определении, очевидно, класс всех СБ–функций, s–сохраняющих предикат Q, является замкнутым относительно как схемной [2], так и термальной суперпозиции.

B–максимальные расширения для указанных классов Поста заимствуем из работы [2]:

A_1 –максимальным расширением $\tilde{A}_1$ является класс s–сохранения предиката $x_1 \le x_2$;

L_1 –максимальным расширением $\tilde{L}_1$ является класс s–сохранения предиката

$$(x_1 = x_2 = x_3 = x_4) \vee (x_1 = x_2) \& (x_3 = x_4) \vee$$
$$\vee (x_1 = x_4) \& (x_2 = x_3);$$

D_3 –максимальным расширением $\tilde{D}_3$ является класс s–сохранения предиката $x_1 \ne x_2$;

P_6 –максимальным расширением $\tilde{P}_6$ является класс s–сохранения предиката

$$(x_1 = x_2 = x_3 = x_4) \vee$$
$$\vee (x_2 \ne x_3) \& (x_1 = 0) \& (x_4 = 1) \vee$$
$$\vee (x_1 = x_2 = x_3 = 0) \& (x_4 = 1);$$

S_6 –максимальное расширение $\tilde{S}_6$ двойственно $\tilde{P}_6$.

4. Достаточная система расширений для класса O_9:

$\tilde{O}_9^1, \tilde{O}_9^2$.

Определение 2. *Простым (в отличие от s–предиката в [2]) s–предикатом* $R(y_1,\ldots,y_k)$ *будем называть отношение, определенное на носителе* $\{0,1,\xi_1,\ldots,\xi_m,\ldots\}$, *где* ξ_i *– булевы случайные величины с условием* $\mathrm{Re}[\xi_1,\ldots,\xi_m,\ldots] = \{0,1\}^\infty$, *область истинности предиката состоит из случайных столбцов конечного числа типов.*

Очевидно, класс всех СБ–функций, сохраняющих s–предикат, замкнут относительно термальной суперпозиции (ср. [1]).

Класс $\tilde{O}_9^1$ состоит из СБ–функций, s–сохраняющих предикат

$$((x_1 = 0) \& (x_2 = x_3 = 1) \vee (x_1 = 1) \& (x_2 = x_3 = 0));$$

класс $\tilde{O}_9^2$ состоит из СБ–функций, сохраняющих s–предикат $A \cup C \cup D$, где

$$A = \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\},$$

C – множество всех случайных столбцов $(\xi_1,\ldots,\xi_4)^T$, таких, что пересечение $A \cap \mathrm{Re}[\xi_1,\ldots,\xi_4]^T$ непусто,

$$D = \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \xi_7 & \xi_8 \\ 0 & 1 & 1 & \xi_4 & 0 & \xi_6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \xi_3 & 1 & \xi_5 & 0 & 0 & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix} \right\}.$$

5. Достаточная система расширений для класса O_8: $\tilde{O}_8^1, \tilde{O}_8^2, \tilde{O}_8^3, \tilde{O}_8^4$.

Класс $\tilde{O}_8^1$ состоит из СБ–функций, s–сохраняющих предикат

$$(x_1 = x_2 = x_3 = x_4) \vee$$
$$\vee (x_2 \ne x_3) \& (x_1 = 0) \& (x_4 = 1).$$

Класс $\tilde{O}_8^2$ состоит из СБ–функций, сохраняющих простой s–предикат $A \cup C \cup D$, где

$$A = \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\},$$

C – множество всех случайных столбцов $(\xi_1,\ldots\xi_4)^T$ таких, что $A \cap \mathrm{Re}[\xi_1,\ldots,\xi_4]^T$ непусто, $D = \{(011\xi)^T\}$.

Класс $\tilde{O}_8^3$ состоит из СБ–функций, сохраняющих простой s–предикат $A \cup C \cup D'$, где A и C определены в описании класса $\tilde{O}_8^2$, $D' = \{(\xi\,0\,0\,1)^T\}$.

Класс $\tilde{O}_8^4$ состоит из СБ–функций, сохраняющих простой s–предикат $A \cup C \cup D \cup D'$, где A, C, D, D′ определены в описании классов $\tilde{O}_8^2$, $\tilde{O}_8^3$.

Доказательство максимальности расширений следует из того, что классы $\tilde{O}_8^i$, $i = \overline{1,4}$, различны и составляют достаточную систему расширений.

6. Достаточная система расширений для класса O_1:

$\tilde{C}_2, \tilde{C}_3, \tilde{O}_1$.

Класс $\tilde{O}_1$ состоит из СБ–функций, сохраняющих простой s–предикат $A \cup C \cup D$,

где $A = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\}$, C – множество всех случайных столбцов $(\xi,\eta)^T$ таких, что пересечение $A \cap \mathrm{Re}[\xi,\,\eta]^T$ непусто, $D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

7. Выводы

Теорема 1. *Для того чтобы система СБ–функций, содержащая 0, 1, x, порождала термальной суперпозицией булеву функцию* $f(\tilde{x})$ *из* P_2, *необходимо и достаточно, чтобы она не содержалась целиком ни в одном из тех классов списка*

$$\tilde{O}_8^i,\ i = \overline{1,4},\ \tilde{O}_9^j,\ j = 1,2,\ \tilde{L}_1,\ \tilde{A}_1, \tilde{P}_6,\ \tilde{S}_6,$$

которые не содержат $f(\tilde{x})$.

Теорема 2. *Для того чтобы система СБ–функций была полна для* P_2 *относительно термальной суперпозиции, необходимо и достаточно, чтобы она не содержалась целиком ни в одном из классов*

$$\tilde{D}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3, \tilde{A}_1, \tilde{L}_1, \tilde{D}_3, \tilde{O}_9^i, i = 1,2.$$

Отметим, что настоящая работа в плане функциональной полноты близка к ранее выполненной работе [5]. В работе [5] случайные булевы функции задаются с полным перечнем их реализаций, т.е. с существенно более полной информацией о стохастическом функционировании. Стоит лишь сравнить: число предполных классов в настоящей модели всего 8 против 7485 в модели [5], а число предполных классов определяет сложность распознавания полноты стохастических базисов.

Предполагается, что полученные результаты должны использоваться в теории и практике синтеза надежных схем из ненадежных функциональных элементов.

Библиографический список

1. *Тарасов В.В.* О реализации не всюду определенных функций алгебры логики // Математические заметки. 1982. Т.32. № 1. С. 89 – 96.

2. *Тарасов В.В.* К проблеме реализуемости функций алгебры логики схемами в базисе из ненадежных функциональных элементов // Проблемы передачи информации. 2006. Т.42. № 2. С. 94 – 100.

3. *Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б.* Функции алгебры логики и класса Поста. М.: Наука. 1966 .

4. *Тарасов В.В.* К проблеме выразимости в алгебре частичных булевых функций // Проблемы передачи информации. 2005. Т. 41. № 1. С. 68 – 73.

5. *Тарасов В.В.* О полноте конечных систем случайных булевых функций //Вестник Рязанской государственной радиотехнической академии. 2007. Вып. № 20. С. 19-25.