ISBN 978-5-7722-0272-2. Вестник РГРТА. Вып. 20. Рязань, 2007

УДК 517.925

С.С. Мамонов

РЕЖИМЫ СИНХРОНИЗАЦИИ СИСТЕМЫ ЧАСТОТНО-ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассматривается система частотно-фазовой синхронизации второго порядка. Находятся значения параметров системы для режимов синхронизации, получены условия существования трех предельных циклов второго рода, выясняется характер их устойчивости. Для системы с синусоидальной нелинейностью построена область притяжения в случае существования двух предельных циклов второго рода.

Широкое распространение в радиоэлектронике, технике, связи, радиоинавигации, механике получили системы фазовой синхронизации (СФС). К системам фазовой синхронизации относятся системы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ). Для увеличения полосы захвата системы ФАПЧ используются комбинированные системы, содержащие кольца фазовой синхронизации и частотной автоподстройки (ЧАП). Дифференциальное уравнение системы частотно-фазовой автоподстройки (ЧФАП) можно записать в виде [1,2]

$$p\sigma(t) + \Omega_1 K_1(p) F_1(\sigma(t)) + \\ + \Omega_2 K_2(p) F_2(p\sigma(t)) = \Omega_н, \quad (1)$$

где $p = d/dt$ - оператор дифференцирования, $\sigma(t)$ - разность фаз эталонного и подстраиваемого генераторов, Ω_1 - полоса удержания кольца ФАПЧ, Ω_2 - полоса удержания кольца ЧАП, $K_1(p)$ и $K_2(p)$ - коэффициенты передачи фильтров нижних частот в фазовой и частотных цепях управления, $F_1(\sigma)$ и $F_2(\sigma)$ - характеристики фазового и частотного детекторов, $\Omega_н$ - начальная расстройка. В случае интегрирующих фильтров $K_1(p) = K_2(p) = (Tp+1)^{-1}$ и нелинейной характеристики частотного детектора $F_2(p\sigma) = \dfrac{2\beta_1 p\sigma}{1+(\beta_1 p\sigma)^2}$ (β_1 - расстройка по частоте, при которой напряжение на выходе ЧД максимально) [2] уравнение (1) примет вид:

$$T\ddot{\sigma} + \dot{\sigma} + \Omega_1 F_1(\sigma) + \Omega_2 F_2(p\sigma) = \Omega_н. \quad (2)$$

Заменой $\dot{\sigma} = y$, $t = \sqrt{\dfrac{T}{\Omega_1}}$, $\varphi(\sigma) = F_1(\sigma) - \dfrac{\Omega_н}{\Omega_1}$, $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{T\Omega_1}}$, $b = \dfrac{\Omega_2}{\Omega_1}$, $\beta = \beta_1\sqrt{\dfrac{\Omega_1}{T}}$ уравнение (2) приводится к системе

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = y, \\ \dot{y} = -\lambda y - \dfrac{2b\beta y}{1+\beta^2 y^2} - \varphi(\sigma). \end{cases} \quad (3)$$

Определение. Решение $x(t, x_0) = \begin{pmatrix} y(t, y_0) \\ \sigma(t, \sigma_0) \end{pmatrix}$ системы (4) называется предельным циклом второго рода, если существует $\tau > 0$, целое число $j \neq 0$ такие, что $\sigma(t+\tau, \sigma_0) = \sigma(t, \sigma_0) + 2\pi j$, $y(t+\tau, y_0) = y(t, y_0)$.

Система (3) изучалась в работах [2,3] где качественно-численными методами получены условия устойчивости, соответствующие режимам синхронизации фазовой автоподстройки, условия существования и числа предельных циклов второго рода. Предельный цикл второго рода соответствует асинхронному режиму СФС, особенностью которого является нарастание разности фаз $\sigma(t)$. Наличие неустойчивого предельного цикла второго рода позволяет выделить дополнительную область режимов синхронизации. В данной работе для системы (3) получены условия существования трех предельных циклов второго рода, определен характер их устойчивости. Найдены значения параметров системы, соответствующие режимам синхронизации, указаны границы полосы захвата.

Рассмотрим систему (3), где $b = 0$:

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = y, \\ \dot{y} = -\alpha y - \varphi(\sigma). \end{cases} \quad (4)$$

В этом случае отсутствует кольцо частотной автоподстройки [4,5].

Теорема 1. Пусть для системы (4) выполнены условия: $\varphi(\sigma)=g(\sigma)-\gamma$, $g(\sigma)-\Delta$ - периодическая функция,

$$\gamma>0,\ M=-\min_{\sigma} g(\sigma), \int_0^{\sigma} g(\xi)d\xi \ge 0,$$

$$M_1=\max_{\sigma}\int_0^{\sigma} g(\xi)d\xi,\ \ M_2=\max_{\sigma}\left| g(\sigma)\int_0^{\sigma} g(\xi)d\xi\right|,$$

$\int_0^{\Delta} g(\xi)d\xi=0,\ \alpha^2<\dfrac{4\gamma^3}{27M_2}$, тогда у системы (4) существует предельный цикл второго рода $F(\sigma)$

$$0<\frac{2\gamma}{3\alpha}-\frac{3\alpha M_1}{2\gamma}\le F(\sigma)\le\frac{M+\gamma}{\alpha},\ \sigma\in(-\infty;+\infty)\ .(5)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $V_1(y,\sigma)=y-\dfrac{2\gamma}{3\alpha}+\dfrac{3\alpha}{2\gamma}\int_0^{\sigma} g(\xi)d\xi$, пусть

$\Omega_1=\{(y,\sigma):V_1(y,\sigma)\ge 0\}$, $\partial\Omega_1=\left\{(y,\sigma):y=\dfrac{2\gamma}{3\alpha}-\dfrac{3\alpha}{2\gamma}\int_0^{\sigma} g(\xi)d\xi\right\}$. Найдем производную функции $V_1(y,\sigma)$ на множестве $\partial\Omega_1$ в силу системы (4):

$$\dot V_1(y,\sigma)=-\alpha\left(\frac{2\gamma}{3\alpha}-\frac{3\alpha}{2\gamma}\int_0^{\sigma} g(\xi)d\xi\right)-\varphi(\sigma)+$$
$$+\frac{3\alpha}{2\gamma}g(\sigma)\left(\frac{2\gamma}{3\alpha}-\frac{3\alpha}{2\gamma}\int_0^{\sigma} g(\xi)d\xi\right)\ge\frac{\gamma}{3}-\frac{9\alpha^2M_2}{4\gamma^2}>0.$$

Кривая $\partial\Omega_1$ является линией без контакта. Пусть $V_2(y,\sigma)=y-\tau$, $\tau>\dfrac{M+\gamma}{\alpha}$, $\Omega_2=\{(y,\sigma):V_2(y,\sigma)\le 0\}$, $\partial\Omega_2=\{(y,\sigma):y=\tau\}$, тогда для производной функции $V_2(y,\sigma)$ на множестве $\partial\Omega_2$ в силу системы (4) выполняется неравенство $\dot V_2(y,\sigma)=-\alpha\tau-g(\sigma)+\gamma<0$. По теореме Брауэра существует предельный цикл, содержащийся во множестве $\Omega=\Omega_1\bigcap\Omega_2$.

Теорема 2. Пусть для системы (3) выполнены условия: $\varphi(\sigma)=g(\sigma)-\gamma$, $g(\sigma)-\Delta$ - периодическая функция,

$$M=-\min_{\sigma} g(\sigma),\ \int_0^{\sigma} g(\xi)d\xi\ge 0,$$

$$M_1=\max_{\sigma}\int_0^{\sigma} g(\xi)d\xi,\ \int_0^{\Delta} g(\xi)d\xi=0,\ \gamma>0,\ M_2=$$
$$=\max_{\sigma}\left|g(\sigma)\int_0^{\sigma} g(\xi)d\xi\right|,\ \lambda<\frac{b\beta}{4},\ S_1=\Big((b\beta-\lambda)-$$
$$-\sqrt{b\beta(b\beta-4\lambda)}\Big)^{\frac12},\ S_2=\Big(\sqrt{b\beta(b\beta-4\lambda)}+(b\beta-$$
$$-\lambda)\Big)^{\frac12},\ \tau_1=\frac{S_1}{\beta\sqrt{\lambda}},\ \tau_2=\frac{S_2}{\beta\sqrt{\lambda}},\ \alpha^2\le\frac{4\gamma^3}{27M_2},$$

$$(\alpha-\lambda)\left(1+\frac{\beta^2\left(4\gamma^2-9\alpha^2M_1\right)^2}{36\alpha^2\gamma^2}\right)-2b\beta>0, \tag{6}$$

$$-\lambda\tau_1-\frac{2b\beta\tau_1}{1+\beta^2\tau_1^2}+M+\gamma<0,\ \frac{M+\gamma}{\alpha}<\tau_1<$$
$$<\tau_2-\frac{M_1}{\tau_2}, \tag{7}$$

$$-\frac{\sqrt{\lambda}S_2}{\beta}-\frac{2\sqrt{\lambda}bS_2^3}{S_2^2\lambda+\left(S_2^2-\beta^2\lambda M_1\right)^2}-\frac{\beta^2\lambda M_2}{S_2^2}+\gamma>0, \tag{8}$$

$$-\lambda\tau_3-\frac{2b\beta\tau_3}{1+\beta^2\tau_3^2}+M+\gamma<0,\ \tau_3>\tau_2, \tag{9}$$

тогда у системы (4) существуют три предельных цикла второго рода

$$0<\frac{4\gamma^2-9\alpha^2M_1}{6\alpha\gamma}<$$
$$<\Phi_1(\sigma)<\tau_1<\Phi_2(\sigma)<\tau_2<\Phi_3(\sigma)<\tau_3,$$
$$\sigma\in(+\infty;-\infty).$$

Предельные циклы $\Phi_1(\sigma),\Phi_3(\sigma)$ являются устойчивыми, $\Phi_2(\sigma)$ - неустойчивым предельным циклом второго рода.

Доказательство. Рассмотрим функцию $V_1(y,\sigma)=y-F(\sigma)$, где $F(\sigma)-\Delta$ - периодическое решение системы (4). Обозначим $\Omega_1=\{(y,\sigma):V_1(y,\sigma)\ge 0\}$, $\partial\Omega_1=\{(y,\sigma):y=F(\sigma)\}$. Найдем производную функции $V_1(y,\sigma)$ на множестве $\partial\Omega_1$ в силу системы (3). Используя соотношения (5), (6), получаем неравенство

$$\dot{V}_1(y,\sigma) = -\lambda F(\sigma) - \frac{2b\beta F(\sigma)}{1+\beta^2 F^2(\sigma)} - F(\sigma)\left(\frac{\varphi(\sigma)}{F(\sigma)} + \frac{dF(\sigma)}{d\sigma}\right) = \frac{F(\sigma)}{1+\beta^2 F^2(\sigma)}\left((\alpha-\lambda)\left(1+\beta^2 F^2(\sigma)\right) - 2b\beta\right) \geq \frac{F(\sigma)}{1+\beta^2 F^2(\sigma)}\left((\alpha-\lambda)\left(\frac{\beta^2}{36\alpha^2\gamma^2}\left(4\gamma^2 - 9\alpha^2 M_1\right)^2 + 1\right) - 2b\beta\right) > 0. \qquad (10)$$

Пусть $V_2(y,\sigma) = y - \tau_1$, $\Omega_2 = \{(y,\sigma) : V_2(y,\sigma) \leq 0\}$, $\partial\Omega_2 = \{(y,\sigma) : y = \beta^{-1}\}$, тогда, используя (7), для производной функции $V_2(y,\sigma)$ на множестве $\partial\Omega_2$ получаем соотношение $\dot{V}_2(y,\sigma) = -\lambda\tau_1 - \frac{2b\beta\tau_1}{1+\beta^2\tau_1^2} + M + \gamma < 0$. Условия (7), (10) обеспечивают положительную инвариантность множества $\Omega_1 \cap \Omega_2$. По теореме Брауэра во множестве $\Omega_1 \cap \Omega_2$ содержится предельный цикл второго рода $0 < F(\sigma) < \Phi_1(\sigma) < \tau_1, \sigma \in (+\infty; -\infty)$.

Рассмотрим функцию $V_3(y,\sigma) = y - \tau_2 + \frac{1}{\tau_2}\int_0^\sigma g(\xi)d\xi$. Обозначим $\Omega_3 = \{(y,\sigma) : V_3(y,\sigma) \leq 0\}$, $\partial\Omega_3 = \left\{(y,\sigma) : y = \tau_2 - \frac{1}{\tau_2}\int_0^\sigma g(\xi)d\xi\right\}$.

Используя (8), находим производную функции $V_3(y,\sigma)$ на множестве $\partial\Omega_3$ в силу системы (3):

$$\dot{V}_3(y,\alpha) = -\lambda y - \frac{2b\beta}{1+\beta^2 y^2} - g(\sigma) + \gamma + \frac{1}{\tau_2}g(\sigma)y \geq -\lambda\tau_2 - \frac{2b\beta\tau_2^3}{\tau_2^2 + \beta^2\left(\tau_2^2 - M_1\right)^2} - \frac{1}{\tau_2^2}g(\sigma)\int_0^\sigma g(\xi)d\xi + \gamma = -\frac{\sqrt{\lambda}S_2}{\beta} - \frac{2b\sqrt{\lambda}S_2^3}{S_2^2\lambda + \left(S_2^2 - \beta^2\lambda M_1\right)^2} + \gamma - \frac{\beta^2\lambda M_2}{S_2^2} > 0. \qquad (11)$$

Пусть $\Omega_2^+ = \{(y,\sigma) : V_2(y,\sigma) \geq 0\}$, тогда в силу (11) множество $\Omega_3 \cap \Omega_2^+$ – отрицательно инвариантно и содержит предельный цикл второго рода $\tau_1 < \Phi_2(\sigma) < \tau_2, \sigma \in (+\infty; -\infty)$.

Рассмотрим функцию $V_4(y,\sigma) = y - \tau_3$, где τ_3 удовлетворяет условию (9), тогда производная $\dot{V}_4(y,\sigma)$ на множестве $\partial\Omega_4 = \{(y,\sigma) : y = \tau_3\}$ меньше нуля. Множество $\Omega = \{(y,\sigma) : V_4(y,\sigma) \leq 0, V_3(y,\sigma) \geq 0\}$ положительно инвариантно и содержит предельный цикл второго рода $\tau_2 < \Phi_3(\sigma) < \tau_3, \sigma \in (+\infty; -\infty)$.

Для системы (3) введем обозначения $P(y,\sigma) = y, Q(y,\sigma) = -\lambda y - \frac{2b\beta y}{1+\beta^2 y^2} - \varphi(\sigma)$. Найдем выражение Бендиксона

$B(y,\sigma) = \frac{\partial P}{\partial\sigma} + \frac{\partial Q}{\partial y} = -\lambda - \frac{2b\beta\left(1-\beta^2 y^2\right)}{(1+\beta^2 y^2)^2}$. Если $y > \tau_2, 0 < y < \tau_1$, то $B(y,\sigma) < 0$. Следовательно, множество $\Omega_5 = \{(y,\sigma) : 0 < y < \tau_1\}$ содержит ровно один предельный цикл второго рода $\Phi_1(\sigma)$, множество $\Omega_6 = \{(y,\sigma) : y > \tau_2\}$ - один предельный цикл $\Phi_3(\sigma)$, множество $\Omega_7 = \{(y,\sigma) : \tau_1 < y < \tau_2\}$ - один предельный цикл $\Phi_2(\sigma)$. Для предельного цикла второго рода $\sigma = \sigma^*(\tau), y = y^*(\tau)$ периода Δ характеристический показатель определяется равенством $h = -\frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta B(y^*(\tau))d\tau$. Для предельных циклов $\Phi_1(\sigma), \Phi_3(\sigma)$ показатель $h < 0$, для предельного цикла $\Phi_2(\sigma)$ показатель $h > 0$.Следовательно [3], $\Phi_1(\sigma), \Phi_3(\sigma)$ – устойчивые предельные циклы второго рода, $\Phi_2(\sigma)$ - неустойчивый предельный цикл.

<u>Замечание.</u> Если рассмотреть условия теоремы 2 при λ, стремящемся к нулю, то получим $\lim_{\lambda\to 0}\tau_1 = \frac{1}{\beta}, \lim_{\lambda\to 0}S_2 = \sqrt{2b\beta}, \lim_{\lambda\to 0}\tau_2 = +\infty$. Условия (6), (7), (8) примут вид $\alpha - 2b\beta + \frac{\beta^2\left(4\gamma^2 - 9\alpha^2 M_1\right)^2}{36\alpha\gamma^2} > 0, -b + M + \gamma < 0, \gamma > 0,$ $\frac{M+\gamma}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$. Таким образом, при достаточно малых λ, β у системы (3) существуют три предельных цикла второго рода.

<u>Теорема 3</u>. Пусть для системы (3) выполнены условия: $\varphi(\sigma) = g(\sigma) - \gamma$, $g(\sigma)$ - Δ-периодическая функция, $\gamma > 0$, $\int_0^\Delta \varphi(\sigma)d\sigma \leq 0$,

$$\int_0^\Delta g(\xi)d\xi=0,\ \varphi(\sigma_1)=0,\ \varphi(\sigma_2)=0,\ \sigma_2=\frac{\Delta}{2}-\sigma_1,$$
$$\dot\varphi(\sigma_1)>0, \dot\varphi(\sigma_2)<0, \beta=\lambda\beta_2,\ \Psi_1(\varepsilon,\sigma)=\varepsilon-\frac{1}{\varepsilon}\times$$
$$\times\int_0^\sigma g(\xi)d\xi, \tau_1=\frac{1}{\lambda\beta_2}\left(b\beta_2-1-\sqrt{b\beta_2(b\beta_2-4)}\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$\Psi(\varepsilon,\sigma)=-\lambda\Psi_1(\varepsilon,\sigma)-\frac{2b\beta_2\lambda\Psi_1(\varepsilon,\sigma)}{1+\beta_2^2\lambda^2\Psi_1^2(\varepsilon,\sigma)}+\gamma-$$
$$-\frac{1}{\varepsilon^2}g(\sigma)\int_0^\sigma g(\xi)d\xi<0, \varepsilon\in[\varepsilon_1;\varepsilon_2]\cup[\varepsilon_3;+\infty),$$
$$\Psi(\varepsilon,\sigma)>0, \varepsilon\in[\varepsilon_4;\varepsilon_5]\subset[\varepsilon_2;\varepsilon_3],$$
$$\Psi_1(\varepsilon_2,\sigma)>0, \sigma\in(+\infty;-\infty), \tag{12}$$

существуют $a>0, k$ такие, что $f_1(\sigma)=-a\sigma^2+$

$$+k\sigma+\tau_1,\ f_2(\sigma)=\left(2\int_\sigma^{\sigma_2}\varphi(\xi)d\xi\right)^{\frac{1}{2}},\ f_1(\sigma^*)=$$
$$=f_2(\sigma^*), \sigma^*\in(0;\sigma_2), \tag{13}$$
$$-f_1(\sigma)\lambda\left(1+\frac{2b\beta_2}{1+\lambda^2\beta_2^2 f_1^2(\sigma)}\right)-g(\sigma)+\gamma+$$
$$+2a\sigma f_1(\sigma)-k<0, \sigma\in[0;\sigma^*],$$

тогда у системы (3) существуют два предельных цикла второго рода, множество $W=\left\{(y,\sigma): y\le\varepsilon_2-\frac{1}{\varepsilon_2}\int_0^\sigma g(\xi)d\xi\right\}$ является областью притяжения системы (3).

Если для системы (3) выполнены условия:

$$\Psi(\varepsilon,\sigma)<0,\ \varepsilon\in[\varepsilon_1;\varepsilon_2]\cup[\varepsilon_3;+\infty), \tag{14}$$
$$\Psi(\varepsilon,\sigma)>0,\ \varepsilon\in[\varepsilon_4;\varepsilon_5]\cup[\varepsilon_6;\varepsilon_7],\ [\varepsilon_4;\varepsilon_5]\subset$$
$$\subset[\varepsilon_2;\varepsilon_3],\ [\varepsilon_6;\varepsilon_7]\subset[0;\varepsilon_1],\ \Psi_1(\varepsilon_7,\sigma)>0,$$
$$\sigma\in(+\infty;-\infty), \tag{15}$$

то у системы (3) существуют три предельных цикла второго рода.

Пусть $\alpha_{кр}$ - значение α системы (4), при котором существует периодическое решение $F_0(\sigma)\ge 0, F_0(\sigma_2)=0$, для системы (3) выполнено условие

$$(\alpha_{кр}-\lambda)\left(1+\lambda^2\beta_2^2\left(\frac{1+\gamma}{\alpha_{кр}}\right)^2\right)-2b\lambda\beta_2\le 0, \tag{16}$$

тогда система (3) является устойчивой в целом.

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим функцию $V(y,\sigma,\varepsilon)=y-\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\sigma g(\xi)d\xi$, обозначим $\partial\Omega=\left\{(y,\sigma): y=\varepsilon-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\sigma g(\xi)d\xi\right\}$. Найдем производную функции $V(y,\sigma,\varepsilon)$ в силу системы (3) на множестве $\partial\Omega$:

$$\dot V(y,\alpha,\varepsilon)=-\lambda y-\frac{2b\beta_2\lambda y}{1+\lambda^2\beta_2^2y^2}-g(\sigma)+\gamma+\frac{1}{\varepsilon}y\times$$
$$\times g(\sigma)=\Psi(\varepsilon,\sigma). \tag{17}$$

Пусть $\Omega_1=\{(y,\sigma): V(y,\sigma,\varepsilon_3)\le 0, V(y,\sigma,\varepsilon_5)\ge$ $\ge 0\}$, $\Omega_2=\{(y,\sigma): V(y,\sigma,\varepsilon_4)\le 0, V(y,\sigma,\varepsilon_2)\ge$ $\ge 0\}$, тогда в силу (12), (17) множество Ω_1 - положительно инвариантно, Ω_2 - отрицательно инвариантно. Множества Ω_1,Ω_2 содержат предельные циклы второго рода.

Из условия теоремы $\dot\varphi(\sigma_2)<0$ получим, что состояние равновесия $O_2(\sigma_2,0)$ является седлом. Пусть $s(\sigma)$ - сепаратриса седла $O_2(\sigma_2,0)$, для которой $s(\sigma)>0, \lim\limits_{t\to+\infty}s(\sigma)=0$. Рассмотрим линии $L_2=\{(y,\sigma): y=f_1(\sigma)\}, L_1=\left\{(y,\sigma): y=\left(2\int_\sigma^{\sigma_2}\varphi(\xi)d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$. На линии L_1 выполняется неравенство $\dot y+y\varphi(\sigma)\left(2\int_\sigma^{\sigma_2}\varphi(\xi)d\xi\right)^{-\frac{1}{2}}<0$, на линии L_2 - неравенство

$$\dot y-\dot f_1(\sigma)y=-f_1(\sigma)\lambda\left(1+\frac{2b\beta_2}{1+\lambda^2\beta_2^2f_1^2(\sigma)}\right)-$$
$$-g(\sigma)+\gamma+2a\sigma f_1(\sigma)-k. \tag{18}$$

Пусть $f(\sigma)=\begin{cases} f_1(\sigma), \sigma\in[0;\sigma^*] \\ f_2(\sigma), \sigma\in(\sigma^*;\sigma_2]\end{cases}$, тогда в силу соотношений (13), (18) линия $L_3=\{(y,\sigma): y=f(\sigma), \sigma\in[0;\sigma_2]\}$ является безконтактной и $\dot y-\dot f_\sigma(\sigma)y<0$. Согласно принципу Чаплыгина [4] сепаратриса $s(\sigma)$ расположена выше линии L_3, $s(0)>f(0)=\tau_1$. Множество $\Omega_3=\{(y,\sigma): y\le\tau_1\}$ не содержит предельных циклов, следовательно, множество $W=\left\{(y,\sigma): y\le\varepsilon_2-\frac{1}{\varepsilon_2}\int_0^\sigma g(\xi)d\xi\right\}$ не содержит предельных циклов. В силу теоремы Бендиксона

[4] множество W является областью притяжения состояний равновесий.

Если для системы (3) выполнены условия (14), (15), то множество $\Omega_3 = \{(y,\sigma): : V(y,\sigma,\varepsilon_7) \geq 0, V(y,\sigma,\varepsilon_1) \leq 0\}$ - положительно инвариантно. Множества $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ содержат предельные циклы второго рода.

Устойчивость системы (3) в целом вытекает из соотношения (16), положительной инвариантности множества $\Omega_\alpha = \{(y,\sigma): y \leq F_\alpha(\sigma), \alpha \leq \alpha_{кр}\}$ и теоремы Бендиксона.

Пример. Рассмотрим систему (3), для которой $\varphi(\sigma) = \sin(\sigma) - \gamma$, $\gamma \in (0;1)$, $g(\sigma) = \sin(\sigma)$, $\sigma_1 = \arcsin(\gamma), \sigma_2 = \pi - \sigma_1, b = \dfrac{\Omega_2}{\Omega_1}, \lambda = \dfrac{1}{\sqrt{T\Omega_1}}$, $\beta = \lambda\beta_2$, $\beta_2 = \beta_1\Omega_1$. Пусть $b = 0.5, \beta_2 = 50$. На рис.1 построена область G параметров γ, $\lambda^{-2} = T\Omega_1$, для которых в системе (3) существуют два предельных цикла второго рода.

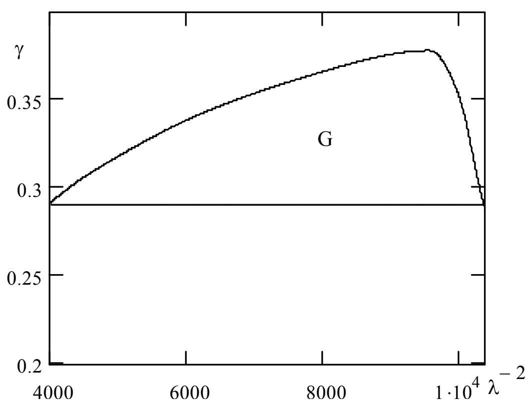

Рис. 1

При фиксированном γ с увеличением λ^{-2} система ЧФАП перестает быть устойчивой в целом, появляется неустойчивый предельный цикл второго рода, определяющий область притяжения состояний равновесия. Дальнейшее увеличение λ^{-2} приводит к появлению трех предельных циклов второго рода.

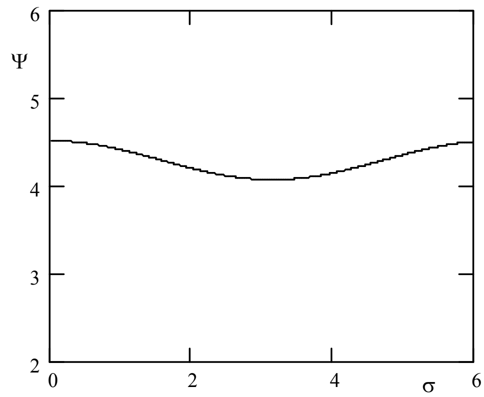

Рис. 2

При $\gamma = 0.33, \lambda^{-2} = 6.9 \cdot 10^3$ в системе (3) существуют два предельных цикла второго рода.

На рис. 2 построена линия $\Psi(\sigma)$, являющаяся границей множества W, ниже которой находятся начальные условия синхронных режимов системы ЧФАП. Таким образом, добавление частотного кольца в систему ФАП приводит к увеличению области параметров режимов синхронизма, при этом в системе ЧФАП появляется дополнительная область синхронных режимов, связанная с появлением неустойчивого предельного цикла второго рода.

Библиографический список

1. *Жилин Н.С.* Принципы фазовой синхронизации в измерительной технике.-Томск: Радио и связь, 1989.-384 с.

2. *Шалфеев В.Д.* К исследованию нелинейной системы частотно-фазовой автоподстройки частоты с одинаковыми интегрирующими фильтрами в фазовой и частотных цепях //Изв. вузов. Радиофизика. 1969.-Т.12.- №7.- С.1037-1051.

3. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.- М.: Наука, 1976.-496 с.

4. *Барбашин Е.А., Табуева В.А.* Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969.-300 с.

5. Системы фазовой синхронизации / В.Н. Акимов, Л.Н. Белюстина, В.Н. Белых и др.–М.: Радио и связь, 1982.-288 с.