ISBN 978-5-7722-0272-2. Вестник РГРТА. Вып. 20. Рязань, 2007

УДК 519.95

В.В. Тарасов

О ПОЛНОТЕ КОНЕЧНЫХ СИСТЕМ СЛУЧАЙНЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Предлагается алгоритм распознавания полноты систем случайных булевых функций в алгебре логике с термальной суперпозицией, когда случайная булева функция задается лишь перечнем ее реализаций.

Будем считать случайную булеву функцию (сокращенно: СБФ) $\xi(x_1,\ldots,x_n)$ от n неслучайных булевых переменных $x_1,\ldots,x_n$ заданной, если имеется полный перечень ее реализаций – внутренних состояний функции:

$$f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_N(x_1,\ldots,x_n),$$

где $f_i(\widetilde{x})\in P_2$, $i=\overline{1,N}$, N – число состояний, называемых иногда функциями неисправностей [1].

СБФ $\xi(x_1,\ldots,x_{i-1},\ldots,x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$ существенно зависит от переменной x_i, если существует реализация, существенно зависящая от переменной x_i, в противном случае переменная называется фиктивной.

Две СБФ $\xi(x_1,\ldots,x_n)$ и $\eta(x_1,\ldots,x_n)$ будем называть эквивалентными, если они обладают одним и тем же перечнем реализаций.

Две СБФ $\xi(\widetilde{x})$ и $\eta(\widetilde{x})$ будут считаться равными, если одну из них можно получить из другой изъятием или введением фиктивных переменных и обе функции представляют один и тот же источник.

В отличие от схемной суперпозиции СБФ [2] используемая здесь термальная суперпозиция СБФ не использует внутренних ветвлений и ветвлений на входах. Так, например, в термальной суперпозиции $\xi(\eta(\widetilde{x}),\eta(\widetilde{x}),\widetilde{x})$ два вхождения СБФ $\eta(\widetilde{x})$ относятся к разным источникам. Таким образом, термальная суперпозиция СБФ геометрически представится в виде дерева.

В работе [3] рассматривалась алгебра не всюду определенных функций с термальной квазисуперпозицией, где допускалось ветвление на входах, а случайные булевы величины, составляющие функцию, подменялись значением 2. Недостатком такой модели СБФ явилось то, что не всегда возможно определить у СБФ число существенных переменных, а это создает трудности в оценках сложности таких функций [4]. Настоящая модель этого недостатка не имеет.

Множество всех СБФ будет обозначаться через VP_2. Очевидно, имеем включение $P_2\subset VP_2$. В настоящей статье приводится алгоритм распознавания полноты систем СБФ N, $N\subset VP_2$, для P_2.

Посредством матрицы

$$\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nm}\end{bmatrix} \qquad (1)$$

будем обозначать случайный булев вектор-столбец, который в любой момент времени принимает одно из значений

$(\alpha_{11},\ldots,\alpha_{n1})^T,\ldots,(\alpha_{1m},\ldots,\alpha_{nm})^T$ – реализаций вектора (1).

Под записью $f(\overline{\alpha^1},\ldots,\overline{\alpha^n})$, где $\overline{\alpha^i}$ – случайные векторы, $i=\overline{1,n}$, понимается случайный вектор, множество всех реализаций которого является объединением множеств реализаций случайных векторов вида

$$(f(\alpha_{11},\ldots,\alpha_{n1}),\ldots,f(\alpha_{1m},\ldots,\alpha_{nm}))^T,$$

где $(a_{ik},\ldots,\alpha_{mk})^T$ – произвольная реализация вектора $\overline{\alpha^k}$, $k=\overline{1,n}$. Таким образом, определен и случайный вектор $\varphi(f(\overline{\alpha^1},\ldots,\overline{\alpha^m}),\overline{\alpha^{m+1}},\ldots,\overline{\alpha^n})$, что позволяет производить итерации со случайными функциями.

Пусть R – множество случайных векторов одной размерности. Через T_R обозначим множество всех СБФ, сохраняющих множество R.

Очевидно, что T_R является замкнутым классом.

Будем говорить, что вектор $\overline{\alpha}$ не больше вектора $\overline{\beta}$ $(\overline{\alpha}\le_r\overline{\beta})$, если любая возможная реализация вектора $\overline{\alpha}$ является возможной реализацией вектора $\overline{\beta}$. Очевидно, что для любой СБФ $f(x_1,\ldots,x_n)$ и любых $\overline{\alpha^1} \le_r \overline{\beta^1},\ldots,\overline{\alpha^n} \le_r \overline{\beta^n}$ имеет место неравенство

$$f(\overline{\alpha^1},\ldots,\overline{\alpha^n}) \le_r f(\overline{\beta^1},\ldots,\overline{\beta^n}).$$

Будем говорить, что СБФ $f(\tilde{x})$ не больше СБФ $g(\tilde{x})$, $f(\tilde{x}) \le_r g(\tilde{x})$, если любая возможная реализация функции $f(\tilde{x})$ является возможной реализацией СБФ $g(\tilde{x})$.

СБФ $\varphi(x,y)$ называется σ-эквивалентной СБФ $\psi(x,y)$, $\varphi(x,y) \sim_\sigma \psi(x,y)$, если выполнено хотя бы одно из условий

$$\varphi(x,y) = \psi^{\sigma_1}(x^{\sigma_2}, y^{\sigma_3}), \quad \varphi(x,y) = \psi^{\sigma_1}(y^{\sigma_2}, x^{\sigma_3})$$

при подходящих булевых $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Пусть W – класс СБФ от переменных x, y. СБФ $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ класса W находится в отношении ρ в классе W, если существуют СБФ $\varphi'(x,y)$ и $\psi'(x,y)$ из W такие, что выполнены отношения

$$\psi(x,y) \sim_\sigma \psi'(x,y), \quad \varphi(x,y) \sim_\sigma \varphi'(x,y),$$
$$\varphi(x,y) \le_n \psi(x,y).$$

Множество W называется ρ-замкнутым, если с каждой СБФ $\varphi(x,y)$ из W множеству W принадлежат и все СБФ $\psi(x,y)$ такие, что $\varphi(x,y)\rho\psi(x,y)$. Очевидно, что ρ-замкнутое множество W полностью характеризуется подмножеством минимальных (в смысле упорядочения $\le_r$) не σ-эквивалентных между собой СБФ.

Поскольку любая СБФ характеризуется случайным вектором ее значений, то те понятия, которые определены выше для случайных векторов, переносятся автоматически на СБФ.

Через $[M]_\rho$ будем обозначать ρ-замыкание множества случайных векторов M.

Пусть M_0 – множество векторов-столбцов

$$\left\{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}\right\}. \qquad (2)$$

Положим $M = [M_0]$. Зададимся целью изучить фактор-множество M/σ.

Заметим, что нижняя строка в (2) не информационна и потому столбцы в (2) естественным образом кодируются числом $\overline{0,7}$. Любые подмножества столбцов (2), равно как и любой случайный вектор из M, получают при этом кодировку в цифровом алфавите $\overline{0,7}$. Учитывая, что существует 16 типов σ-преобразований над СБФ множества W, составляем таблицу переходов (табл. 1).

Таблица 1

	Коды векторов	**Значения параметров преобразования**		
№	0 1 2 3 4 5 6 7	σ_1	σ_2	σ_3
1	2	3	3	5
0	0 1 2 3 4 5 6 7	1	1	1
1	2 4 0 6 1 7 3 5	1	0	1
2	1 0 4 5 2 6 7 6	1	1	0
3	4 2 1 7 0 3 5 3	1	0	0
4	7 6 5 4 3 2 1 0	0	1	1
5	5 3 7 1 6 0 4 2	0	0	1
6	6 7 3 2 5 4 0 1	0	1	0
7	3 5 6 0 7 1 2 4	0	0	0
8	0 2 1 3 4 6 5 7	Переименование переменных		
9	1 4 0 5 2 7 3 6			
10	2 0 4 6 1 3 7 5			
11	4 1 2 7 0 5 6 3			
12	7 5 6 4 3 1 2 0			
13	6 3 7 2 5 0 4 1			
14	5 7 3 1 6 4 0 2			
15	3 6 5 0 7 2 1 4			

Замечание. К примеру: в левом верхнем углу 0 есть код столбца $(0001)^{\mathrm{T}}$, он же код конъюнкции xy; при преобразовании с параметрами $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 1$ конъюнкция переходит в функцию $\bar{\mathrm{x}}\mathrm{y}$, что соответствует столбцу значений $(0100)^{\mathrm{T}}$, код которого 2. Поэтому и в таблице переходов во второй строке слева стоит 2.

Случайные векторы теперь можно записывать не в форме перечисления их реализаций в естественном алфавите $\{0,1\}$, а более коротко. Так, например,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle 027 \rangle.$$

Из табл. 1 вытекают следующие утверждения.

1. В фактор-множестве существуют:

1) пять смежных классов случайных векторов с двумя реализациями: $\langle 01\rangle, \langle 03\rangle, \langle 04\rangle, \langle 05\rangle, \langle 07\rangle$ (здесь и далее будут указываться только представители смежных классов);

2) пять смежных классов случайных векторов с тремя реализациями:

$$\langle 012\rangle, \langle 013\rangle, \langle 016\rangle, \langle 034\rangle, \langle 045\rangle;$$

3) девять смежных классов случайных векторов с четырьмя реализациями:

$$\langle 0123\rangle, \langle 0124\rangle, \langle 0125\rangle, \langle 0127\rangle,$$
$$\langle 0135\rangle, \langle 0167\rangle, \langle 0346\rangle, \langle 0347\rangle, \langle 0456\rangle;$$

4) пять смежных классов случайных векторов с пятью реализациями:

$$\langle 01234\rangle, \langle 01235\rangle, \langle 01256\rangle, \langle 01456\rangle, \langle 01346\rangle;$$

5) пять смежных классов случайных векторов с шестью реализациями:

$$\langle 012345\rangle, \langle 012456\rangle, \langle 013456\rangle, \langle 012356\rangle, \langle 123456\rangle;$$

6) один смежный класс случайных векторов с семью реализациями: $\langle 0123456\rangle$;

7) один смежный класс случайных векторов с восемью реализациями: $\langle 01234567\rangle$;

8) один смежный класс случайных векторов с одной реализацией: $\langle 0\rangle$;

2. Если $\langle \alpha_1 ... \alpha_k\rangle$ и $\langle \beta_1 ... \beta_k\rangle$ σ-эквивалентны, то и $\langle \alpha_{k+1} ... \alpha_8\rangle$ и $\langle \beta_{k+1} ... \beta_8\rangle$ σ-эквивалентны. Здесь

$$\{\alpha_1,...,\alpha_8\} = \{\beta_1,...,\beta_8\} = \{0,1,...,7\}$$

(принцип дополнительности).

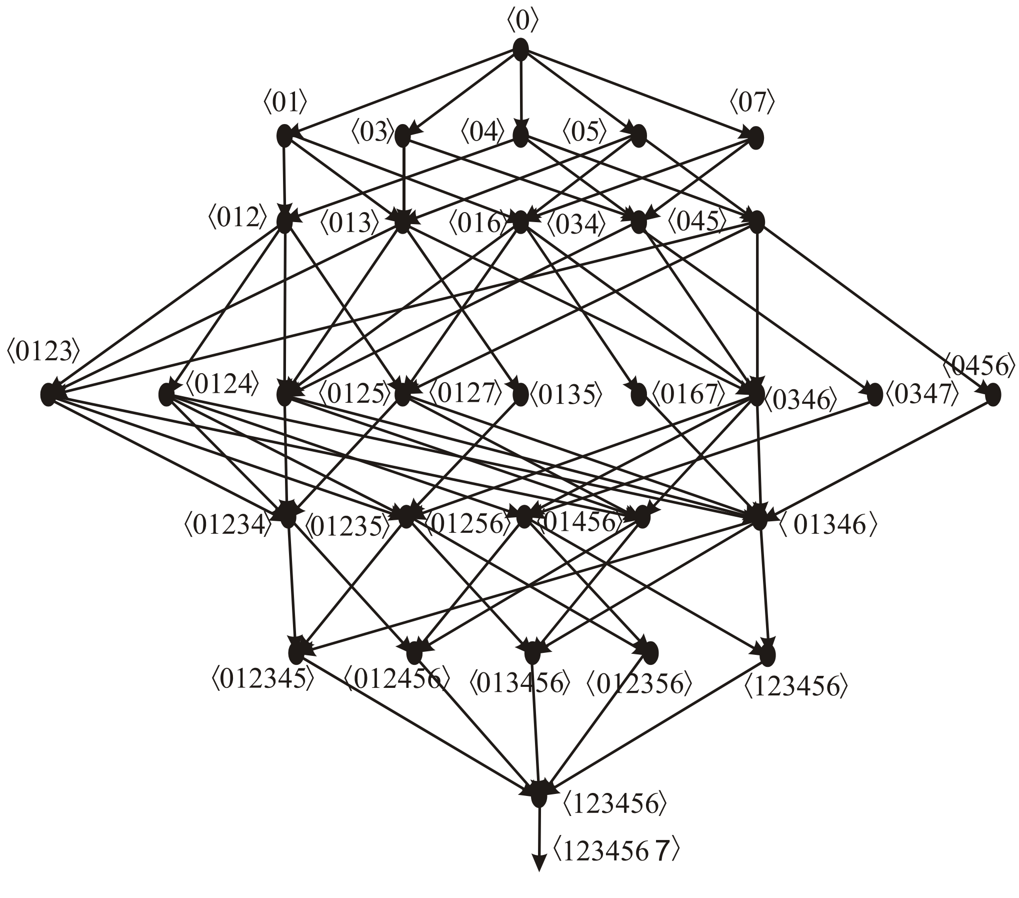
На рисунке в виде графа демонстрируется отношение ρ на фактор-множестве M/σ. Вершинам графа приписаны представители смежных классов; две вершины $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ соединены ориентированным ребром, если и только если отношение $\overline{\alpha}\rho\overline{\beta}$ истинно.

Занумеруем ярусы графа сверху вниз числами от 0 до 7. Произведём подсчет числа независимых подмножеств вершин графа. Для этого отметим некоторые свойства:

1) от любой вершины второго яруса существует путь до любой вершины четвёртого яруса;

2) существует взаимно однозначное соответствие между независимыми подмножествами вершин 0,1,2,3 ярусов и независимыми подмножествами вершин 3,4,5,6 ярусов (по принципу дополнительности);

3) каждому пути, пролегающему по вершинам 0,1,2,3 ярусов, взаимно однозначно соответствует путь, пролегающий по соответствующим, по принципу дополнительности, вершинам 3,4,5,6 ярусов.



Обозначим через $\chi = \left(\overline{\alpha}^1,...,\overline{\alpha}^r\right)$ число независимых подмножеств, содержащих вершины $\overline{\alpha}^1,...,\overline{\alpha}^r$ одного яруса и непустое подмножество вершин других ярусов. Тогда

$\chi(\langle 01\rangle) = \chi(\langle 04\rangle) = \chi(\langle 05\rangle) = 8$.

(к примеру: $\chi(\langle 01\rangle)$ равно мощности следующего множества (см. рисунок):

$\{\{\langle 01\rangle,\langle 034\rangle\},\{\langle 01\rangle,\langle 045\rangle\},\{\langle 01\rangle,\langle 034\rangle,\langle 045\rangle\},$
$\{\langle 01\rangle,\langle 0347\rangle\},\{\langle 01\rangle,\langle 0456\rangle\},\{\langle 01\rangle,\langle 0347\rangle,\langle 0456\rangle\},$
$\{\langle 01\rangle,\langle 034\rangle,\langle 0456\rangle\},\{\langle 01\rangle,\langle 045\rangle,\langle 0347\rangle\}\}$).

$\chi(\langle 03\rangle) = \chi(\langle 07\rangle) = 34$;

$\chi(\langle 01\rangle,\langle 03\rangle) = \chi(\langle 03\rangle,\langle 04\rangle) =$
$= \chi(\langle 03\rangle,\langle 05\rangle) = \chi(\langle 01\rangle,\langle 07\rangle) =$
$= \chi(\langle 04\rangle,\langle 07\rangle) = \chi(\langle 01\rangle,\langle 05\rangle) = 2$,

$\chi(\langle 01\rangle,\langle 04\rangle) = \chi(\langle 04\rangle,\langle 05\rangle) = 0$,

$\chi(\langle 03\rangle,\langle 07\rangle) = 8$,

$\chi(\langle 03\rangle,\langle 05\rangle,\langle 07\rangle) = \chi(\langle 01\rangle,\langle 03\rangle,\langle 07\rangle) = 2$.

Обозначим через $\chi_i = \sum_{N^i}\chi\left(\langle N^i\rangle\right)$, где N^i пробегает все подмножества вершин i-го яруса. Тогда

$$\chi_1 = 116 = 8\cdot 3 + 34\cdot 2 + 2\cdot 6 + 8 + 2\cdot 2.$$

Перейдем к подсчету χ_2. Имеем

$\chi(\langle 012\rangle) = \chi(\langle 013\rangle) = \chi(\langle 016\rangle) =$
$= \chi(\langle 045\rangle) = 2^5 - 1 = 31$;

$\chi(\langle 034\rangle) = 2^6 - 1 = 63$;

$\chi(\langle 034\rangle,\langle 013\rangle) = \chi(\langle 034\rangle,\langle 016\rangle) = 2^4 - 1 = 15$;

$\chi(\langle 012\rangle,\langle 013\rangle) = \chi(\langle 012\rangle,\langle 016\rangle) = \chi(\langle 012\rangle,\langle 034\rangle) =$
$= \chi(\langle 012\rangle,\langle 045\rangle) =$
$= \chi(\langle 013\rangle,\langle 016\rangle) = \chi(\langle 013\rangle,\langle 045\rangle) =$
$= \chi(\langle 034\rangle,\langle 045\rangle) = \chi(\langle 016\rangle,\langle 045\rangle) = 2^3 - 1 = 7$;

$\chi(\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma}) = 2^2 - 1 = 3$,

где $\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma}$ – различные три вершины второго яруса;

$$\chi\langle\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma},\overline{\delta}\rangle = 1,$$

где $\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma},\overline{\delta}$ – любые четыре вершины второго яруса.

Отсюда получаем

$$\chi_2 = 4\cdot 31 + 63 + 2\cdot 15 + 8\cdot 7 + 3\cdot 10 + 5 = 308.$$

Число же всех независимых подмножеств вершин графа равно

$$1 = 2(\chi_1 + \chi_2) + 2^9 - 1 + 4(2^5 - 1) + 3 = 1486.$$

Перейдем теперь к рассмотрению реализации функций алгебры логики формулами над базисом V из случайных булевых функций.

Обозначим через Θ_m множество всех случайных векторов размерностью m.

Пусть $\widetilde{C}_2$ – класс всех СБФ, сохраняющих множество (одномерных случайных векторов) $\{1,[01]\}$; $\widetilde{C}_3$ – класс всех СБФ, сохраняющих множество (одномерных случайных векторов) $\{0,[01]\}$; $\widetilde{M}_1$ – класс всех СБФ, сохраняющих множество двумерных случайных векторов

$$\Theta_2 \cup \left\{\left[(0,0)^T\right],\left[(1,1)^T\right],\left[(0,1)^T\right]\right\};$$

$\widetilde{C}_{4.0}$ – класс всех СБФ, сохраняющих множество двумерных случайных векторов

$$\left\{\left[(0,1)^T\right] \cup \Theta_2\right\} \setminus \left\{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\};$$

$\widetilde{C}_{4.1}$ – класс всех СБФ, сохраняющих множество двумерных случайных векторов

$$\Theta_2 \cup \left[(0,1)^T\right];$$

$\widetilde{D}_{3.0}$ – класс всех СБФ, сохраняющих множество двумерных случайных векторов

$$\left\{\Theta_2 \cup \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\} \setminus \left\{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\};$$

$\widetilde{D}_{3.1}$ – класс всех СБФ, сохраняющих множество двумерных случайных векторов

$$\Theta_2 \cup \left\{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}.$$

Пусть Q – произвольная конечная система СБФ.

Найдем условия, при которых она полна для P_2.

Построение булевых функций одного переменного в P_2. Пусть Q целиком не содержится ни в одном из замкнутых классов: $P_2, VC_2, VC_3, VC_{4.0}, VC_{4.1}, VD_{3.0}, VD_{3.1}, VA_1$. Пусть $f_2 \notin VC_2$, $f_3 \notin VC_3$, f_2 и $f_3 \in Q$. Тогда, отождествляя переменные у функций f_2 и f_3, получаем: 1) константы 0, 1, или 2) функцию $\overline{x}$, или 3) функции

$$\varphi(x) = \begin{cases}0 \text{ при } x = 1,\\ [01] \text{ при } x = 0,\end{cases} \qquad \psi(x) = \begin{cases}1 \text{ при } x = 0,\\ [0,1] \text{ при } x = 1.\end{cases}$$

Пусть отождествлен первый случай. Тогда система функций $\{f_1 \notin VA_1, 0, 1\}$ даст отрицание $\overline{x}$.

Если осуществлен второй случай, то система функций $\{\bar{x}, f_4 \notin VD_{3.0}\}$ даст константу $c \in \{0,1\}$ или СБФ $g(x)$ с реализациями $[01]$. Тогда система $\{f_5 \notin VD_{3.1}, g(x), \bar{x}\}$ даст константу c.

Пусть осуществлен третий случай. Тогда система функций

$$\{f_6 \notin VC_{4.0}, f_7 \notin VC_{4.1}, \varphi(x), \psi(x)\}$$

даст $\bar{x}$ или константу c, другую константу $\bar{c}$ даст одна из систем $\{f_2 \notin VC_2, c\}$, $\{f_3 \notin VC_3, c\}$.

Итак, построены все булевы функции одной переменной: 0, 1, x, $\bar{x}$. Отметим, что при фиксированной системе Q участвовало не более шести замкнутых классов.

Построение функции от двух переменных из P_2. Введем обозначения: $VO_{9.0}$ – класс всех СБФ, сохраняющих множество векторов

$$\left\{\left(\Theta_3 \setminus \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) \cup \right.$$

$$\left. \cup \left\{(000)^T, (111)^T, (001)^T, (101)^T, (010)^T, (110)^T\right\} \right\}.$$

$VO_{9.1}$ – класс всех СБФ, сохраняющих множество векторов

$$\left\{\Theta_3 \cup \left\{(000)^T, (111)^T, (001)^T, (101)^T, (010)^T, (110)^T\right\}\right\}.$$

Система СБФ $\{0, 1, \bar{x}, f_8 \notin VO_{9.0}, f_9 \notin VO_{9.1}\}$, $\{f_8, f_9 \in Q\}$, порождает СБФ ψ_i, $i = \overline{1,8}$, табл. 2.

Таблица 2

X, y	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4
0 0	1 1	0 0	0 0	0 1
0 1	0 0	1 1	0 1	0 0
1 0	0 0	0 1	1 1	0 0
1 1	0 1	0 0	0 0	1 1

ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8
0 0	1 1	1 1	1 0
1 1	0 0	1 0	1 1
1 1	1 0	0 0	1 1
0 1	1 1	1 1	0 0

Пусть M_1 – множество случайных векторов $(0000)^T$, $(1111)^T$, $(0011)^T$, $(0101)^T$, $(1100)^T$, $(1010)^T$, столбцы значений ψ_i, $i = \overline{1,8}$. Не принимая в расчет нулевой ярус графа (см. рисунок), пусть

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_{1485} -$$

перечень всех независимых подмножеств множества вершин графа, т.е. подмножества не σ-эквивалентных векторов-представителей классов из M/σ.

Определим семейства множеств W_i, $i = \overline{1,5}$:

1) $W_{1i} = [M_1 \cup Q_i]_{\rho\sigma}$, $i = \overline{1,1485}$;

2) $W_{2i} = \left[M_1 \cup Q_i \cup \left\{\left[\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}^T\right]\right\}\right]_{\rho\sigma}$, $i = \overline{1,1485}$;

3) $W_{3i} = \left[M_1 \cup Q_i \cup \left\{\left[\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^T\right]\right\}\right]_{\rho\sigma}$, $i = \overline{1,1485}$;

4) $W_{4i} = \left[\ M_1 \cup Q_i \cup \right.$

$\left. \cup \left\{\left[\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}^T\right], \left[\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^T\right]\right\}\right]_{\rho\sigma}$, $i = \overline{1,1485}$;

5) $W_{5i} = \left[M_1 \cup Q_i \cup \left\{\left[(0110)^T\right]\right\}\right]_{\rho\sigma}$, $i = \overline{1,1485}$.

Обозначим через $VO_{9.2}$ класс всех СБФ, сохраняющих множество случайных векторов $[M_1]_{\rho\sigma}$, и через Φ_{ij} класс всех СБФ, сохраняющих множество случайных векторов W_{ij}, $i = \overline{1,5}$, $j = \overline{1,1485}$.

Потребуем, чтобы система $Q, Q \subseteq VP_2$, целиком не содержалась в замкнутых классах $VO_{9.2}$, Φ_{ij}, $i = \overline{1,5}$, $j = \overline{1,1485}$. Пусть $g(x_1, \ldots, x_n) \in VO_{9.2}$, $g(\tilde{x}) \in Q$. Множество $g\left([M_1]_\rho^n\right)$ содержит вектор $\bar{\alpha}$, для которого выполнено одно из четырех условий:

1) $\bar{\alpha} \in [M_0]_\rho$ (см.(2));

2) $\bar{\alpha} \in \left\{\left[\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^T\right]_\sigma\right\}$;

3) $\bar{\alpha} \in \left\{\left[\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\right]_\sigma\right\}$;

4) $\bar{\alpha} \in \left\{\left[(0110)^T\right]_\sigma\right\}$.

При выполнении любого из этих условий рассматриваем СБФ $g_1(\widetilde{x}) \notin \Phi_{i_1 j_1}$, $g_1(x_1,...,x_n) \in Q$, при подходящих индексах i_1, j_1; $\Phi_{i_1 j_1}$ – класс всех СБФ, сохраняющих множество случайных векторов $[\mathrm{M}_1 \cup \{\overline{\alpha}\}]_{\rho\sigma} = W_{i_1 j_1}$. Пусть построена система множеств

$$W_{i_0 j_0} = [M_1]_{\rho\sigma} \subset W_{i_1 j_1} \subset ... \subset W_{i_k j_k} \qquad (3)$$

и функций $g, g_1,...,g_k(x_1,...,x_m)$, принадлежащих Q, $g_k \notin \Phi_{i_k j_k}$. Тогда множество $g\left(W^m_{i_k j_k}\right)$ содержит вектор $\overline{\alpha}, \overline{\alpha} \notin W_{i_k j_k}$, так что $\mathrm{W}_{i_{k+1} j_{k+1}} = \left[W_{i_k j_k} \cup \{\overline{\alpha}\}\right]_{\rho\sigma}$ при некоторых $i_{k+1} \le 5$, $j_{k+1} \le 1485$. По условию существует СБФ g_{k+1} из Q такая, что $g_{k+1} \notin \Phi_{i_{k+1} j_{k+1}}$.

Процесс продолжаем до тех пор, пока не будет получен вектор $\overline{\alpha} \in M_0$, что эквивалентно получению нелинейной функции двух переменных и что вместе с функцией $\bar{x}$ дает базис в P_2.

Самая длинная цепь в (3) получается в случае, когда:

1) при построении функций одного переменного из P_2 использовалось не более шести классов;

2) рассматривались классы $VO_{9.0}$, $VO_{9.1}$, $VO_{9.2}$;

3) рассматривались классы, соответствующие цепочке множеств:

$$[M_1]_\rho \subseteq \left[M_1 \cup \{\langle 01234567\rangle\}\right]_{\rho\sigma} \subseteq$$

$$\subseteq \left[M_1 \cup \{\langle 0123456\rangle\}\right]_{\rho\sigma} \subseteq ... \subseteq$$

$$\subseteq \left[M_1 \cup \{\langle 0123456\rangle\} \cup ... \cup \{\langle 03\rangle\}\right]_{\rho\sigma} \subseteq$$

$$\subseteq \left[M_1 \cup \{\langle 0123456\rangle\} \cup ... \cup \{\langle 03\rangle\} \cup \{\langle 01\rangle\}\right]_{\rho\sigma} \subseteq$$

$$\subseteq \Bigg[M_1 \cup \{\langle 0123456\rangle\} \cup ... \cup \{\langle 01\rangle\} \cup$$

$$\cup \left\{\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T\right]\right\}\Bigg]_{\rho\sigma} \subseteq$$

$$\subseteq \Bigg[M_1 \cup \{\langle 0123456\rangle\} \cup ... \cup \left\{\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T\right]\right\} \cup$$

$$\cup \left\{\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T\right]\right\}\Bigg]_{\rho\sigma} \subseteq$$

$$\subseteq \Bigg[M_1 \cup \{\langle 0123456\rangle\} \cup ... \cup \left\{\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T\right]\right\} \cup$$

$$\cup \left\{(0110)^{\mathrm{T}}\right\}\Bigg]_{\rho\sigma} \subseteq$$

$$\subseteq \left[M_1 \cup \{\langle 0123456\rangle\} \cup ... \cup \{(0110)^T\} \cup \{\langle 0\rangle\}\right]_{\rho\sigma}.$$

Всего не более 43 классов.

Теорема 1. *Для того чтобы система Q, $Q \subseteq VP_2$, была полной для P_2, необходимо и достаточно, чтобы она целиком не содержалась ни в одном из классов:* P_2, VC_2, VC_3, $VC_{4.0}$, $VC_{4.1}$, $VD_{3.0}$, $VD_{3.1}$, VA_1, $VO_{9.0}$, $VO_{9.1}$, $VO_{9.2}$, Φ_{ij}, $i = \overline{1,5}$, $j = \overline{1,1485}$ (всего $11 + 5 \cdot 1485 = 7436$).

Теорема 2. *Для распознавания полноты для P_2 системы Q СБФ из VP_2, необходимо и достаточно проверить невхождение системы Q в не более чем 43 замкнутых классах. Выборка этих классов зависит от системы Q.*

Библиографический список

1. *Яблонский С.В.* Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Сб. «Матем. вопросы кибернетики»: 1988. Вып.1. С.5 – 25.

2. *Тарасов В.В.* К проблеме полноты для систем функций алгебры логики с ненадежной реализацией // Матем.сб. 1975. Т.98, №3. С.378 – 394.

3. *Тарасов В.В.* О реализации не всюду определенных функций алгебры логики формулами // Матем.заметки. 1982. Т.32, №1. С.89 – 96.

4. *Ложкин С.А.* О синтезе формул из не всюду определенных функциональных элементов // Тр. VI междунар. конф. «Дискретные модели в теории управляющих систем». Москва, 7 – 11 декабря. 2004. М.: Издательство МГУ, 2004. С. 44 – 47.