

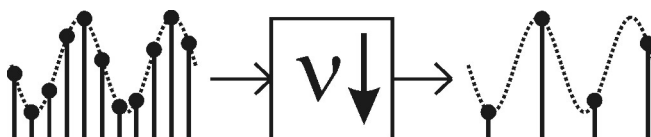
++++

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ЦОС

Методические указания к лабораторным работам

Часть II



Рязань 2017

УДК 621.372 (021)

Современные методы цифровой обработки сигналов: методические указания к лабораторным работам, часть II / Рязан. гос. радиотехн. ун-т; сост.: В.В. Витязев, А.Ю. Линович, П.Б. Никишкин; под ред. проф. В.В. Витязева. — Рязань, 2017. — 24 с.

Приведены описания и методические указания к выполнению лабораторных работ по цифровой обработке сигналов студентами старших курсов, обучающихся по направлениям 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», 09.05.01 «Применение и эксплуатация автоматизированных систем специального назначения», 09.04.04 «Программная инженерия» и 27.04.04 «Управление в технических системах». Описание каждой работы содержит краткие теоретические сведения, рекомендации по подготовке и выполнению домашнего и лабораторного заданий.

Предназначены для студентов дневного отделения, обучающихся по направлению «Радиотехника».

Ил. 12. Табл. 2. Библиогр.: 5 назв.

Сигнал, цифровая обработка, адаптивный фильтр, линейное предсказание, эквалайзер

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра ТОР Рязанского государственного радиотехнического университета (зав. кафедрой проф. В.В. Витязев)

Современные методы цифровой обработки сигналов
Часть II

Составители: В и т я з е в Владимир Викторович
Л и н о в и ч Александр Юрьевич
Н и к и ш к и н Павел Борисович

Редактор М.Е. Цветкова
Корректор С.В. Макушина

Подписано в печать 29.05.17. Формат бумаги 60х84 1/16.
Бумага газетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 1,25.

Тираж 50 экз. Заказ

Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТУ.

Лабораторная работа № 3

Адаптивные фильтры

Цели работы

Исследование методов и алгоритмов цифровой адаптивной фильтрации на примере задач линейного предсказания и выравнивания частотной характеристики канала связи.

Содержание работы

Реализация поставленной цели предполагает решение следующих задач:

1. изучение методов и алгоритмов цифровой адаптивной фильтрации;
2. расчёт характеристик авторегрессионного (АР) процесса и траекторий настройки весовых коэффициентов адаптивного фильтра (АФ) для алгоритма наискорейшего спуска;
3. моделирование линейного предсказателя в программе «Matlab»;
4. моделирование эквалайзера в программе «Matlab».

Программные средства поддержки

Программа «Matlab» и её приложение «Simulink» с дополнительным набором средств цифровой обработки сигналов «Signal Processing Toolbox».

Теоретическая часть

Адаптивный цифровой фильтр — устройство, предназначенное для фильтрации поступающих на его вход цифровых сигналов, весовые коэффициенты которого корректируются в процессе работы под воздействием блока управления в соответствии с некоторым адаптивным алгоритмом.

Частотная характеристика АФ способна подстраиваться в процессе работы под внешние условия. Такое свойство АФ имеет большое значение в тех случаях, когда на характеристики сигналов и систем оказывают влияние внешние возмущающие воздействия, либо меняющиеся с течением времени, либо просто априорно неизвестные или по каким-то причинам не подлежащие учёту.

Чаще всего настройка АФ выполняется по специальной обучающей последовательности с использованием среднеквадратического

критерия качества. В этом случае на основной вход АФ подаётся входной сигнал $x[nT]$, а на обучающий вход АФ подаётся образцовая обучающая последовательность $d[nT]$. Цель обучения заключается в подборе таких весовых коэффициентов цифрового фильтра, чтобы в результате фильтрации сигнала $x[nT]$ полученный на выходе сигнал $y[nT]$ насколько возможно точно повторял обучающую последовательность (рис. 3.1).



Рис. 3.1. Функциональная схема АФ

Разность между образцовой обучающей последовательностью $d[nT]$ и выходом фильтра $y[nT]$ называется сигналом ошибки:

$$e[nT] = d[nT] - y[nT].$$

При настройке по среднеквадратическому критерию предполагается, что весовые коэффициенты фильтра должны быть выбраны такими, чтобы математическое ожидание квадрата ошибки $e^2[nT]$ было минимальным.

Одной из наиболее известных задач цифровой обработки сигналов является **задача предсказания** будущих отсчётов стационарного случайного процесса. Например, если известна последовательность отсчётов $x[(n-1)T]$, $x[(n-2)T]$, ..., $x[(n-M)T]$, ставится задача получить оценку следующего за ними отсчёта $x[nT]$. Если случайный процесс является стационарным в широком смысле случайным процессом с нулевым математическим ожиданием, то линейное предсказание описывается линейной комбинацией предшествующих отсчётов сигнала:

$$\hat{x}[nT] = \sum_{k=1}^M w_k x[(n-k)T], \quad (3.1)$$

где $\hat{x}[nT]$ — оценка отсчёта $x[nT]$, полученная на основе имеющейся информации о поведении сигнала $x[nT]$ в предшествующие моменты времени. В рассмотренном примере по известным отсчётам сигнала определяется один отсчёт, расположенный непосредственно за ними. Поэтому такой предсказатель называется одношаговым линейным предсказателем в прямом направлении или просто прямым линейным предсказателем.

Возможен и другой вариант предсказания. Если известна последовательность отсчётов $x[nT]$, $x[(n-1)T]$, ..., $x[(n-M+1)T]$ и ставится задача получения оценки предшествующего им отсчёта $x[(n-M)T]$, то такой предсказатель называется обратным линейным предсказателем, поскольку предсказывает не будущее, а прошлое.

В данной лабораторной работе исследуется только прямое линейное предсказание. Анализ выражения (3.1) приводит к следующим выводам. Предсказатель можно реализовать на основе трансверсального фильтра (КИХ-фильтра) с M отводами от линии задержки и весовыми коэффициентами $w_1, w_2, \dots, w_M$ (рис. 3.2).

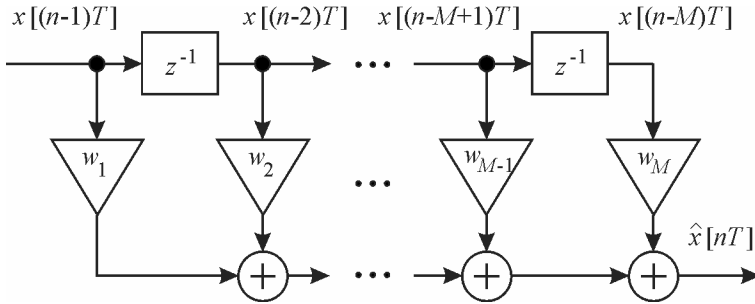


Рис. 3.2. Одношаговый линейный предсказатель M -го порядка

Для настройки АФ в качестве обучающей последовательности можно использовать отсчёты самого входного сигнала, после того как они станут известными, то есть:

$$d[nT] = x[nT].$$

Выходной сигнал АФ — результат предсказания:

$$y[nT] = \hat{x}[nT].$$

Введём для удобства записей новые переменные. Объединим весовые коэффициенты КИХ-фильтра (рис. 3.2) в вектор весовых коэффициентов $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_M)^T.$$

Известные отсчёты входного сигнала, хранящиеся на момент предсказания в линии задержки фильтра, тоже представим в виде вектора:

$$\mathbf{x}[nT] = (x[(n-1)T], x[(n-2)T], \dots, x[(n-M)T])^T.$$

В таком случае **сигналом ошибки** называется разность:

$$e[nT] = d[nT] - y[nT] = d[nT] - \mathbf{w}^T[nT] \mathbf{x}[nT]. \quad (3.2)$$

Математическое ожидание $E\{ \}$ квадрата ошибки $e^2[nT]$ можно с учётом введённых обозначений можно записать в виде:

$$\begin{aligned} J &= E\{e^2[nT]\} = \\ &= E\{d^2[nT]\} + \mathbf{w}^T E\{\mathbf{x}[nT] \mathbf{x}^T[nT]\} \mathbf{w} - 2E\{d[nT] \mathbf{x}^T[nT]\} \mathbf{w}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Корреляционная матрица входного сигнала по определению имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= E\{\mathbf{x}[(n-1)T] \mathbf{x}^T[(n-1)T]\} = \\ &= \begin{pmatrix} r[0] & r[T] & \dots & r[(M-1)T] \\ r[T] & r[0] & \dots & r[(M-2)T] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r[(M-1)T] & r[(M-2)T] & \dots & r[0] \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $r[nT]$ — отсчёты автокорреляционной функции (АКФ) случайного процесса $x[nT]$ на входе предсказателя. Элементы $r[0]$, расположенные на главной диагонали равны дисперсии входного сигнала фильтра σ_x^2 .

Взаимная корреляционная функция (ВКФ), выражающая статистическую связь между отсчётами входного сигнала $x[(n-1)T]$, $x[(n-2)T]$, $\dots$, $x[(n-M)T]$ и истинным предсказанием отсчёта $x[nT] = d[nT]$:

$$\mathbf{r} = E\{\mathbf{x}[(n-1)T] d[nT]\} = \begin{pmatrix} r[T] \\ r[2T] \\ \vdots \\ r[MT] \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

С учётом (3.4) и (3.5) запись выражения (3.3) можно упростить:

$$J = J_{\min} + \mathbf{w}^T \mathbf{R} \mathbf{w} - 2\mathbf{r}^T \mathbf{w},$$

где $J_{\min} = E\{d^2[nT]\} = \sigma_d^2$ — минимальная величина среднеквадратического отклонения (СКО), достигаемая при оптимальном выборе весовых коэффициентов фильтра:

$$\mathbf{w}_{\text{опт}} = (w_{1\text{опт}}, w_{2\text{опт}}, \dots, w_{M\text{опт}})^T.$$

Зависимость СКО от весовых коэффициентов фильтра называется рабочей функцией $J(\mathbf{w})$. Пример рабочей функции для фильтра, содержащего два весовых коэффициента, показан на [рис. 3.3](#). Линии уровня (сечения функции при фиксированных значениях J) имеют эллиптическую форму с центрами в точке оптимальной настройки $(w_{1\text{опт}}, w_{2\text{опт}})^T$.

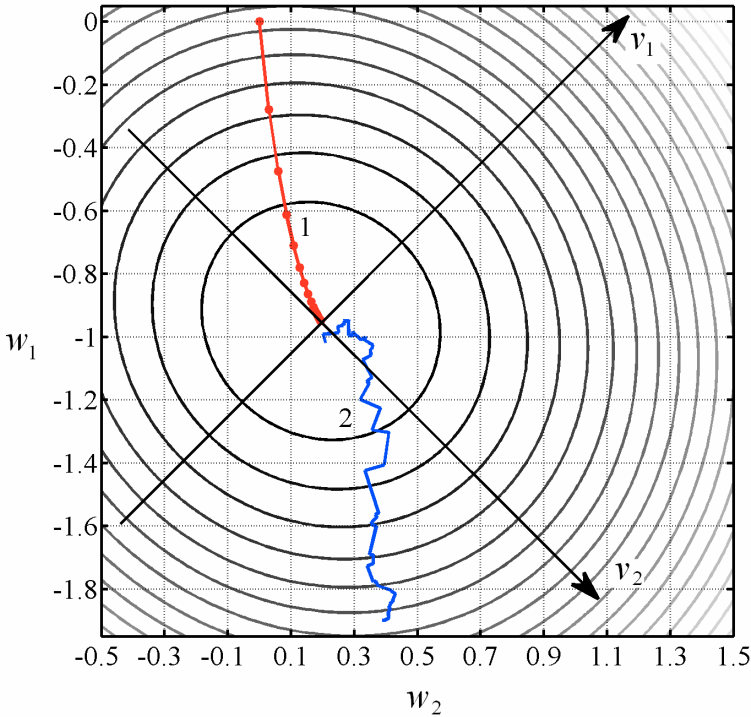


Рис. 3.3. Поиск оптимальной настройки (точки минимума рабочей функции) в случае линейного предсказания 2-го порядка:
1 — алгоритм наискорейшего спуска, 2 — алгоритм НСКО

Таким образом, двумерная функция СКО ошибки является квадратической, график её имеет форму вогнутого параболоида, проекция «нижней» точки которого на плоскость векторов весовых коэффициентов представляет собой вектор оптимальных весовых коэффициентов $\mathbf{w}_{\text{опт}}$. Квадратическая функция ошибки имеет только один глобальный оптимум, локальных минимумов у такой функции не существует.

Собственные векторы корреляционной матрицы $\mathbf{R}$ входного сигнала определяют главные оси v_1 и v_2 сечений поверхности, образованной графиком функции ошибки J (рабочей функции). Собственные значения корреляционной матрицы $\mathbf{R}$ соответствуют вторым производным функции ошибки J относительно главных осей.

Оптимальная настройка коэффициентов предсказателя может быть найдена из уравнения Винера — Хопфа:

$$\mathbf{R} \mathbf{w}_{\text{опт}} = \mathbf{r}. \quad (3.6)$$

Таким образом, задачей АФ является поиск точки минимума рабочей функции. Во многих представляющих интерес случаях параметры рабочей функции неизвестны и нет её аналитического описания. Однако, усредняя квадрат сигнала ошибки за некоторый период времени, можно измерить или оценить положение точек на квадратичной поверхности.

Широкую известность получили два метода поиска параметров рабочей функции: Ньютона и наискорейшего спуска. Первый является фундаментальным в том смысле, что в процессе поиска точки минимума квадратичной рабочей функции изменения всех весовых коэффициентов направлены на эту точку. В данной лабораторной работе исследуется только метод наискорейшего спуска, суть которого состоит в следующем. Выбирается произвольное начальное значение $\mathbf{w}[0]$ а затем выполняется итеративная процедура градиентного поиска, при которой значения весовых коэффициентов меняются в направлении убывания градиента функции $J(\mathbf{w})$:

$$\mathbf{w}[(n+1)T] = \mathbf{w}[nT] - \nabla_n \frac{\mu}{2}, \quad (3.7)$$

где ∇_n — оценка градиента функции $J(\mathbf{w})$ на n -й итерации алгоритма, μ — константа, от выбора которой зависят скорость сходимости и устойчивость. Все изменения весовых коэффициентов на каждой очередной итерации осуществляются в направлении отрицательного градиента рабочей функции, а отрицательный градиент направлен на точку минимума только тогда, когда его начало расположено на одной из главных осей (рис. 3.3).

Алгоритм настройки АФ в соответствии с правилом (3.7) называется **алгоритмом наискорейшего спуска**. Анализ этого идеализированного алгоритма начнём с введения новой переменной — вектора ошибки настройки весовых коэффициентов:

$$\mathbf{c}[nT] = \mathbf{w}_{\text{опт}} - \mathbf{w}[nT], \quad (3.8)$$

где $\mathbf{w}_{\text{опт}}$ — оптимальный вектор весовых коэффициентов, соответствующий точке минимума рабочей функции и являющийся решением уравнения Винера — Хопфа (3.6).

Преобразуя (3.7) к виду

$$\mathbf{w}[(n+1)T] = \mathbf{w}[nT] + \mu(\mathbf{r} - \mathbf{R}\mathbf{w}[nT])$$

и подставляя $\mathbf{r}$ из (3.6), получаем

$$\mathbf{c}[(n+1)T] = (\mathbf{I} - \mu\mathbf{R})\mathbf{c}[nT], \quad (3.9)$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица.

Если корреляционную матрицу $\mathbf{R}$ входного сигнала записать в нормальной форме:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1},$$

где $\mathbf{\Lambda}$ — диагональная матрица собственных чисел корреляционной матрицы, а $\mathbf{Q}$ — матрица собственных векторов (её столбцы являются собственными векторами матрицы $\mathbf{R}$), то (3.9) можно записать иначе:

$$\mathbf{c}[(n+1)T] = (\mathbf{I} - \mu\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1})\mathbf{c}[nT]. \quad (3.10)$$

Все собственные значения матрицы $\mathbf{R}$ являются действительными неотрицательными числами. Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям матрицы $\mathbf{R}$, взаимно ортогональны. Матрицу собственных векторов $\mathbf{Q}$ можно нормировать (привести к ортонормированной) так, чтобы $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$.

Введём вспомогательную переменную:

$$\mathbf{v}[nT] = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{c}[nT] = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{w}_{\text{опт}} - \mathbf{w}[nT]). \quad (3.11)$$

Тогда (3.10) можно упростить:

$$\mathbf{v}[(n+1)T] = (\mathbf{I} - \mu\mathbf{\Lambda})\mathbf{v}[nT].$$

Полученное уравнение является аналогом геометрической прогрессии в матричной форме. Известно, что геометрическая прогрессия сходится, если её знаменатель по модулю меньше единицы. Отсюда находим условие сходимости алгоритма наискорейшего спуска:

$$0 < \mu < 2/\lambda_{\text{макс}},$$

где $\lambda_{\max}$ — наибольшее собственное значение корреляционной матрицы $\mathbf{R}$ входного сигнала.

Движение к точке минимума рабочей функции происходит на каждой итерации алгоритма наискорейшего спуска строго в направлении отрицательного градиента рабочей функции, как показано на [рис. 3.3](#). Если выбрать параметр μ слишком большим, то алгоритм будет делать слишком большие шаги и будет «перешагивать» через точку минимума рабочей функции.

При попытке реализации алгоритма наискорейшего спуска на практике возникает проблема оценки градиента в (3.7). В простейшем случае оценкой градиента можно считать произведение $-2 e[nT] \mathbf{x}[nT]$. Полученный таким образом алгоритм называется **алгоритмом наименьшего СКО (НСКО)**:

$$\mathbf{w}[(n+1)T] = \mathbf{w}[nT] + \mu e[nT] \mathbf{x}[nT]. \quad (3.12)$$

Здесь вместо математического ожидания сигнала ошибки взято мгновенное значение самого сигнала ошибки. Оценка градиента на каждом шаге отличается от истинного значения, алгоритм может делать шаги в разные стороны, но в среднем траектория движения направлена в сторону отрицательного градиента ([рис. 3.3](#)).

Сложность настройки АФ связана с правильным выбором параметра μ , обеспечивающего компромисс между скоростью сходимости и устойчивостью настройки. Чтобы не вычислять собственные числа матрицы $\mathbf{R}$, можно воспользоваться **нормированным алгоритмом НСКО**:

$$\mathbf{w}[(n+1)T] = \mathbf{w}[nT] + \frac{\mu_n}{\|\mathbf{x}[nT]\|^2} e[nT] \mathbf{x}[nT].$$

Квадрат нормы в данном выражении имеет смысл оценки средней мощности входного сигнала.

Этот алгоритм удобен в тех случаях, когда мощность входного сигнала заранее не известна или сильно меняется в процессе настройки АФ. Нормированный алгоритм НСКО устойчив при выборе:

$$0 < \mu_n < 2.$$

Одной из задач радиосвязи, для решения которой применяются АФ, является компенсация отражённых лучей. Кроме прямого пути распространения радиоволн от передающей антенны к приёмной, часто появляются отражения от окружающих объектов. Для компенсации возникающей интерференции лучей в приёмнике устанавливают

фильтр, выравнивающий частотную характеристику канала связи, — эквалайзер (рис 3.4).

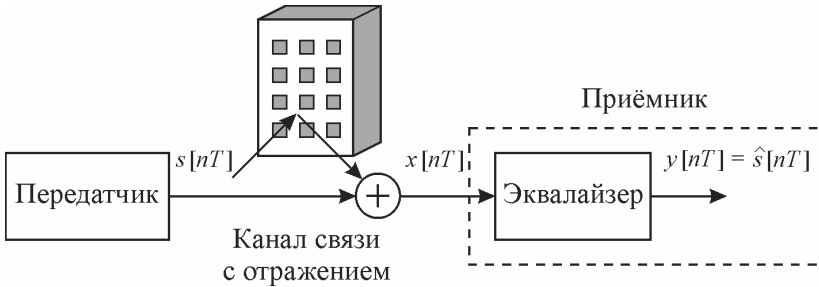


Рис. 3.4. Устранение интерференции, возникающей в каналах связи с многолучевым распространением

Если переданный сигнал $s[nT]$ и сигнал на входе эквалайзера $x[nT]$ связаны передаточной функцией $H(z)$, то выравнивающий фильтр в эквалайзере настраивается таким образом, чтобы его передаточная функция $H_{\text{эКВ}}(z)$ удовлетворяла условию:

$$H(z) H_{\text{эКВ}}(z) = z^{-D}, \quad (3.13)$$

где символом z^{-D} обозначена задержка сигнала на D отсчётов. Если строгого равенства в (3.13) невозможно достичь, то подбирается наиболее точное приближённое решение задачи. Такая задача называется **задачей обратного моделирования** (рис. 3.5).

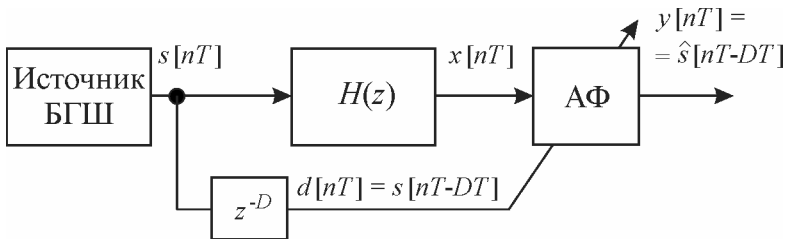


Рис. 3.5. Задача обратного моделирования

Задача прямого моделирования, чаще называемая **задачей идентификации**, заключается подборе такой передаточной функции, при которой с наибольшей точностью воспроизводится реакция модели-

руемой системы (рис. 3.6). В этом случае передаточная функция АФ после настройки удовлетворяет условию:

$$H_{\text{АФ}}(z) = H(z). \quad (3.14)$$

Если строгого равенства в (3.14) невозможно достичь, то подбирается наиболее точное приближённое решение задачи.

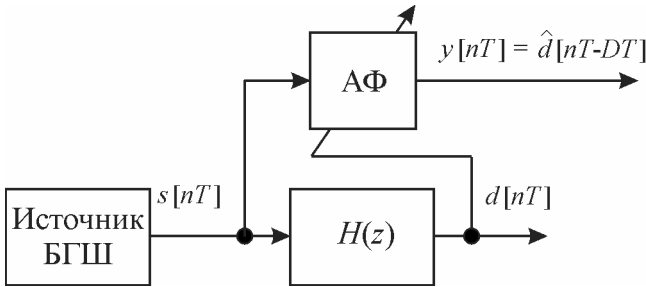


Рис. 3.6. Задача идентификации

Для построения эквалайзера устанавливают фильтр с обратной передаточной функцией $H_{\text{эвк}}(z) = 1 / H_{\text{АФ}}(z)$.

В задаче компенсации отражённых лучей второй метод, как правило, позволяет получить более точное восстановление сигнала эквалайзером. Тем не менее, его применение ограничено вследствие возможной неустойчивости цифрового звена с передаточной функцией вида $1 / H(z)$.

Пример линейного предсказателя с двумя весовыми коэффициентами

Пусть требуется получить предсказатель для авторегрессионного (АР) случайного процесса второго порядка. И пусть АР-процесс описывается уравнением:

$$x[nT] + a_1 x[(n-1)T] + a_2 x[(n-2)T] = s[nT],$$

$s[nT]$ — некоррелированный гауссовский стационарный в широком смысле случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_s^2 — дискретный белый гауссовский шум (БГШ). Параметры АР-процесса: $a_1 = -0,195$, $a_2 = 0,95$.

Если параметры АР-процесса a_1 и a_2 известны, то оптимальным предсказателем является КИХ-фильтр с весовыми коэффициентами $w_{1 \text{ опт}} = -a_1$ и $w_{2 \text{ опт}} = -a_2$.

Если параметры АР-процесса a_1 и a_2 априорно неизвестны, то можно воспользоваться АФ. Будем использовать АФ 2-го порядка с настройкой по алгоритму наискорейшего спуска. Схема модели показана на **рис. 3.7**.

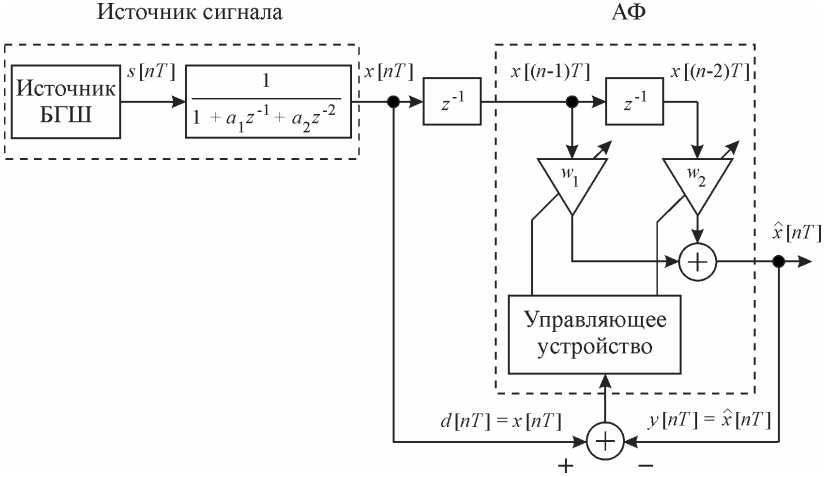


Рис. 3.7. Линейный предсказатель на основе АФ 2-го порядка

Корреляционная матрица может быть записана в виде:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r(0) & r(1) \\ r(1) & r(0) \end{pmatrix},$$

где коэффициенты автокорреляционной функции имеют значения:

$$r(0) = \sigma_x^2, \quad r(1) = -\frac{a_1}{1 + a_2} \sigma_x^2.$$

Принимая для упрощения дисперсию входного сигнала $\sigma_x^2 = 1$, находим:

$$r(0) = 1, \quad r(1) = \frac{0,195}{1 + 0,95} = 0,1$$

и

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0,1 \\ 0,1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы выполнялось указанное выше условие $\sigma_x^2 = 1$, дисперсия источника БГШ должна быть равной:

$$\sigma_s^2 = \frac{(1-a_2)((1+a_2)^2 - a_1^2)}{1+a_2} \approx 0,0965. \quad (3.15)$$

Это значение потребуется при выполнении лабораторного задания.

Собственные числа корреляционной матрицы $\mathbf{R}$:

$$\lambda_1 = 1 - \frac{a_1}{1+a_2} = 1,1, \quad \lambda_2 = 1 + \frac{a_1}{1+a_2} = 0,9.$$

Разброс собственных чисел:

$$\chi(\mathbf{R}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1-a_1+a_2}{1+a_1+a_2} \approx 1,22.$$

Собственные векторы, образующие ортонормированной базис:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Эти векторы получаются одинаковыми для всех вариантов данной лабораторной работы: они имеют единичную длину и повернуты под углом 45° к осям координат w_1 и w_2 . Они совпадают с осями эллипсов на графике рабочей функции, которые тоже повернуты на 45° . Оси эллипсов находятся в таком же отношении, что и собственные числа λ_1 и λ_2 .

Матрица собственных векторов составляется из векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{Q}$ позволяет выполнить переход от системы координат w_1 и w_2 к новому ортонормированному базису, в котором эллипсы на графике рабочей функции (рис. 3.3) описываются каноническими уравнениями, то есть оси эллипсов совпадают с направлениями осей координат. Переход к новому базису с помощью преобразования (3.11) позволяет записать рабочую функцию J в наиболее простой (канонической) форме:

$$J = J_{\min} + \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2.$$

Чтобы построить траекторию настройки АФ, достаточно задать начальные значения весовых коэффициентов w_1 и w_2 , затем с помощью

(3.8) вычислить начальное значение вектора ошибки $\mathbf{c}[0]$, далее с помощью итеративной процедуры (3.9) рассчитать несколько следующих значений вектора ошибки $\mathbf{c}[nT]$ и, наконец, с помощью (3.8) осуществить обратное преобразование — переход к координатам w_1 и w_2 .

Полученная в результате такого расчёта траектория настройки весовых коэффициентов w_1 и w_2 показана на рис. 3.3. Рабочая функция $J(w_1, w_2)$ показана в виде линий уровня, точка минимума соответствует оптимальным значениям $w_{1\text{ опт}}$ и $w_{2\text{ опт}}$. Линии уровня представляют собой эллипсы, оси которых совпадают с осями координат v_1 и v_2 собственных векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$. Линии уровня можно провести условно, не рассчитывая точных значений функции $J(w_1, w_2)$.

Обучающая кривая представляет собой сумму постоянной составляющей и экспонент, постоянные времени которых соответствуют собственным числам корреляционной матрицы $\mathbf{R}$:

$$J[nT] = J_{\min} + \lambda_1 (1 - \mu\lambda_1)^{2n} |v_1[0]|^2 + \lambda_2 (1 - \mu\lambda_2)^{2n} |v_2[0]|^2,$$

где конечное значение $J_{\min} = \sigma_s^2$. Дисперсия σ_s^2 уже была вычислена в (3.15). Начальные значения координат $v_k[0]$ находятся по формуле (3.11), при подстановке:

$$\begin{pmatrix} v_1[nT] \\ v_2[nT] \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^T (\mathbf{w}_{\text{опт}} - \mathbf{w}[0]).$$

Постоянные времени экспонент можно вычислить следующим образом:

$$\tau_k \approx \frac{-1}{2 \ln(1 - \mu\lambda_k)}.$$

Домашнее задание

1. Начертить схему модели линейного предсказания с указанием мест включения источника АР-процесса и адаптивного фильтра.
2. Выбрать АР-параметры случайного процесса: параметр a_1 взять из табл. 3.1 в соответствии с номером бригады, параметр a_2 рассчитать по формуле $a_2 = 1 - 0,01 \cdot D$, где D — номер дня недели, в который выполняется лабораторная работа, считая понедельник первым днём недели.

Табл. 3.1 Варианты заданий

Номер бригады	1	2	3	4	5
Параметр a_1	−0,15	−0,08	−0,17	−0,14	−0,07

Табл. 3.1 Варианты заданий (продолжение)

Номер бригады	6	7	8	9	10
Параметр a_1	-0,16	-0,13	-0,18	-0,09	-0,12

3. Рассчитать основные характеристики исследуемого АР-процесса и занести результаты расчёта в табл. 3.2.

Табл. 3.2 Характеристики АР-процесса

Коэффициенты АКФ		Собственные числа		Разброс собственных чисел	Минимум среднего квадрата ошибки
$r(0)$	$r(1)$	λ_1	λ_2	$\chi = \lambda_1/\lambda_2$	$J_{\min} = \sigma_v^2$

4. Составить корреляционную матрицу случайного процесса и собственные векторы.
5. Построить на миллиметровой бумаге или с использованием компьютера график рабочей функции $J(w_1, w_2)$ в виде линий уровня (рис. 3.3).
6. Пользуясь выражениями (3.8) и (3.9), рассчитать четыре траектории весовых коэффициентов для алгоритма наискорейшего спуска (достаточно нескольких первых шагов). Результаты расчёта представить в табличной форме и в форме ломаных кривых на графике рабочей функции $J(w_1, w_2)$. При расчёте четырёх траекторий выбрать разные значения шага адаптации μ и разные начальные точки: координаты начальных точек принять равными $(0, 0)$, $(0, -2a_2)$, $(-2a_1, 0)$ и $(-2a_1, -2a_2)$, а величину шага адаптации μ — равной 0,3, 0,5, 0,8 и 1.
7. Рассчитать для $\mu = 0,05$ постоянные времени экспоненциальных колебаний, из которых складывается обучающая кривая. Построить график обучающей кривой $J(nT)$, где n — номер отсчёта дискретного времени, $T = 1$ мс — период дискретизации.

Порядок выполнения работы

1. Получить разрешение преподавателя или лаборанта на выполнение лабораторной работы.
2. Включить компьютер. Запустить выполнение программы «Matlab». Указать в строке «Current Directory» путь к рабочей папке (рабочая папка должна располагаться в папке D:\xxx, где xxx — номер учебной группы). Имена папок и файлов должны содержать только латинские буквы и цифры. Загрузить приложение «Simulink».
3. Собрать имитационную модель линейного предсказания (рис. 3.7) и выполнить моделирование. Ниже приводится пример такой модели в «Simulink» (рис. 3.8). На выходе модели образуется сигнал ошибки линейного предсказания $e[nT]$.

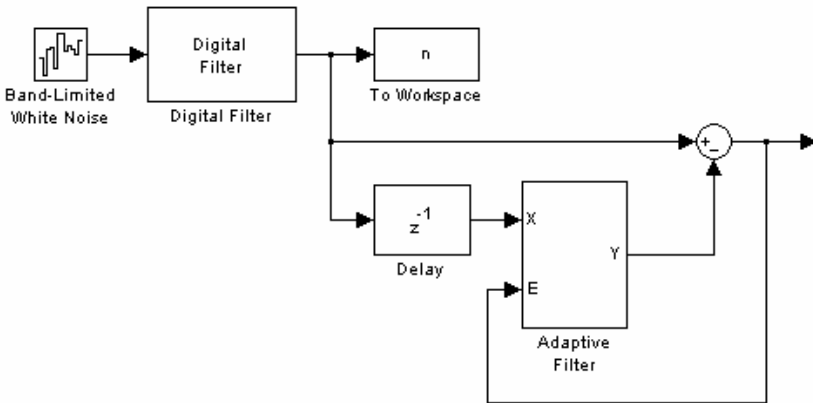


Рис. 3.8. Схема модели линейного предсказания в «Simulink»

- 3.1. Для получения АР-процесса следует воспользоваться источником БГШ «Band-Limited White Noise» из стандартной библиотеки и цифровым фильтром «Digital Filter» из библиотеки «Signal Processing Blockset» (раздел «Filtering», подраздел «Filter Designs»).
- 3.2. В настройках источника БГШ задать: в строке «Sample time» период дискретизации $T = 1 \cdot 10^{-3}$ с, в строке «Noise power» спектральную плотность мощности $T \cdot \sigma_s^2$ В²/Гц (σ_s^2 рассчитывалась в домашнем задании). Начальное значение для фор-

(3.12) представлен на рис. 3.10. Шаг настройки определяется параметром μ : в модели это величина «mu», заданная в блоке «Gain» (блок умножения на константу). Далее следуют умножитель и интегратор, собранный из сумматора и элемента задержки «Delay» с обратной связью. В элементах задержки «Delay», установленных в подсистемах «W1» и «W2», в полях настройки «Initial conditions» следует указать начальные значения весовых коэффициентов АФ. Величину параметра μ и начальные значения весовых коэффициентов следует выбирать такими же, как в домашнем задании. Первый эксперимент удобно выполнить для нулевых начальных условий.

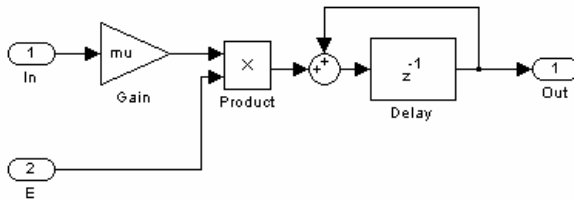


Рис. 3.10. Подсистема, реализующая алгоритм НСКО

- 3.7. Выполнить пробное моделирование, задав интервал моделирования 2 с, и метод расчёта состояний модели «discrete (no continuous states)» в разделе общих настроек «Configurations Parameters». Записав отсчёты АР-последовательности, получаемой на выходе дискретного фильтра, в рабочую область (блок «To Workspace»), вычислить для неё оценку дисперсии σ_x^2 и убедиться, что $\sigma_x^2 \approx 1$. В строке «Save format» блока «To Workspace» должен быть выбран вариант «Array» («Массив»).
- 3.8. Подключить блоки «To Workspace» к выходам подсистем «W1» и «W2» для регистрации мгновенных значений последовательностей $w_1[nT]$ и $w_2[nT]$. Выполнить повторно моделирование и вывести на график траекторию изменения весовых коэффициентов АФ с помощью функции

`plot(W1, W2)`

- 3.9. Выполнить ещё три эксперимента для других начальных условий и других значений параметра μ . Для этого изменить начальные значения коэффициентов АФ в элементах задержки

«Delay», установленных в подсистемах «W1» и «W2» (рис. 3.10) и величину « μ ». Значения задавать те же, что и при выполнении домашнего задания. Результаты вывести на график, аналогично пп. 3.8.

4. Построить обучающую кривую для $\mu = 0,05$ при нулевых начальных условиях.
 - 4.1. В подсистемах «W1» и «W2» разработанной выше модели задать $\mu = 0,05$ в блоках «Gain» и нулевые начальные условия в строках «Initial conditions» блоков Delay.
 - 4.2. Подключить блок «To Workspace» для вывода сигнала ошибки линейного предсказания «E» в рабочую область.
 - 4.3. Написать текст программы, выполняющей многократный запуск модели и вычисление среднего квадрата ошибки. Усреднение результатов проводить по 100 экспериментам. Пример такой программы приводится ниже.

```

sim('Lab3.mdl')           % Запуск модели «Lab3.mdl»
y = E.^2;                 % Сигнал ошибки в квадрате

for k = 2:100,            % Цикл из 99 повторений
    sim('Lab3.mdl')       % Запуск модели «Lab3.mdl»
    y = y + E.^2;         % Суммирование результатов
end

figure(4)                 % Окно для вывода на график
plot(y / 100)             % Вычисление среднего
grid on                   % Вывод координатной сетки

```

- 4.4. Закрыть все смотровые окна модели, собранной в «Simulink», чтобы отображение информации при каждом выполненном моделировании не замедляло работы модели. Выполнить программу. Сохранить обучающую кривую для отчёта о лабораторной работе.
5. Собрать имитационную модель и провести моделирование двухлучевого канала связи с параметрами с адаптивным компенсатором межсимвольной интерференции, решающим задачу обратного моделирования.
 - 5.1. Схема двухлучевого канала при моделировании в «Simulink» показана на рис. 3.11. Коэффициент усиления по запаздывающему лучу рассчитать по формуле $K = 0,9 - 0,5 \cdot V$, где V — номер бригады. Задержку по этому лучу принять равной D , где D — номер дня недели, в который выполняется лабораторная работа, считая понедельник первым днём недели.

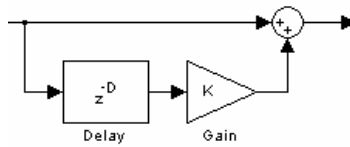


Рис. 3.11. Схема модели двухлучевого канала связи

- 5.2. На вход двухлучевого канала связи подать в качестве испытательного сигнала псевдослучайную последовательность, подключив источник БГШ «Band-Limited White Noise» из стандартной библиотеки. В настройках источника БГШ задать: период дискретизации $T = 1 \cdot 10^{-3}$ с, в строке спектральную плотность мощности $T \text{ В}^2/\text{Гц}$ (дисперсия равна 1). Начальное значение для формирования псевдослучайной последовательности в задать случайным.
- 5.3. В качестве АФ воспользоваться блоком «LMS Filter» из библиотеки и «Signal Processing Blockset» (раздел «Filtering», подраздел «Adaptive Filters»). В настройках блока «LMS Filter» выбрать в строке «Algorithm» алгоритм адаптации «Normalized LMS» («нормированный алгоритм НСКО»), а затем задать количество весовых коэффициентов в строке «Filter length», равное 32, и параметр шага адаптации $\mu = 0,2$ в строке «Step size (mu)». Остальные настройки оставить без изменений. Вход «Input» подключить к выходу модели канала связи. В качестве обучающего сигнала на вход «Desired» подать тестовый сигнал с входа канала связи, задержанный примерно на половину порядка фильтра, то есть на 16 отсчётов. Сигналы с выходов «Output» («Выходной сигнал») и «Error» («Сигнал ошибки») контролировать с помощью средства наблюдения «Scope». Выход «Wts» («Весовые коэффициенты») выводить в рабочую область программы «Matlab» с помощью блока «To Workspace»: в строке «Save format» блока «To Workspace» должен быть выбран, как и ранее, вариант «Array» («Массив»), а, кроме того, в строке «Limit data points to last» («Ограничиться последними моментами времени в количестве...») вместо значения «inf» («бесконечность») следует ввести 1, чтобы запоминалась настройка АФ только в последний момент времени.

- 5.4. Установив интервал моделирования 2 с, сделать пробный запуск модели. Убедиться в том, что сигнал ошибки на выходе «Еггог» уменьшается в процессе настройки АФ.
- 5.5. Написать текст программы, выполняющей многократный запуск модели и вычисление среднего квадрата сигнала ошибки. Усреднение результатов проводить по 100 экспериментам. Пример такой программы приводился выше.
- 5.6. Закрыть все смотровые окна модели, собранной в «Simulink» и выполнить программу. Сохранить обучающую кривую для отчёта о лабораторной работе.
- 5.7. Отобразить графически АЧХ и весовые коэффициенты АФ, которые в данном случае численно совпадают с отсчётами его импульсной характеристики, пользуясь командами:

```
figure(7)
stem(W)           % Отображение отсчётов (массива W)
figure(8)
plot( abs( fft(W, 1000) ) ) % Отображение АЧХ
grid on
```

- 5.8. Сохранить полученные графики для отчёта о лабораторной работе.
6. Собрать имитационную модель и провести моделирование работы адаптивного компенсатора межсимвольной интерференции, решающего задачу прямого моделирования.
 - 6.1. Модель двухлучевого канала остаётся без изменений (рис. 3.11). Настройки источника обучающего сигнала (источника БГШ) тоже не меняются.
 - 6.2. Решение задачи прямого моделирования предполагает параллельное подключение АФ к моделируемой системе, роль которой играет модель двухлучевого канала связи. Поэтому на вход «Input» требуется подать тестовую последовательность от источника БГШ, а на вход «Desired» — сигнал с выхода канала связи (рис. 3.12). В то же время для восстановления принятого сигнала эквалайзером требуется включение фильтра, частотная характеристика которого является обратной функцией по отношению к характеристике канала связи. Такой фильтр можно реализовать воспользовавшись блоком «Digital Filter» из библиотеки «Signal Processing Blockset» (раздел «Filtering», подраздел «Filter Designs»). В настройках цифрового фильтра выбрать в строке «Transfer function type» вариант «PIR (all poles)» («БИХ-фильтр с одними полюсами»).

Затем в поле «Coefficient source» («Источник коэффициентов») выбрать вариант «Input port(s)» («От входа блока»). Вновь появившийся дополнительный вход цифрового фильтра «Den» подключить к выходу «Wts», обеспечив таким образом чтение коэффициентов АФ в процессе его настройки.

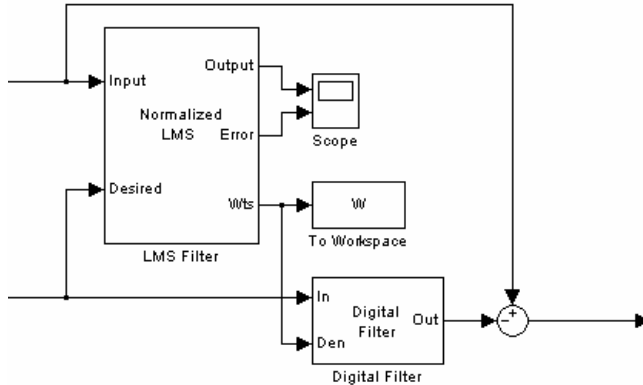


Рис. 3.12. Схема модели эквалайзера, решающего задачу прямого моделирования

- 6.3. Установив интервал моделирования 2 с, сделать пробный запуск модели. Убедиться в том, что сигнал ошибки, определяемый как разность между тестовой последовательностью и выходом блока «Digital Filter» уменьшается в процессе настройки АФ.
- 6.4. Написать текст программы, выполняющей многократный запуск модели и вычисление среднего квадрата сигнала ошибки. Усреднение результатов проводить по 100 экспериментам.
- 6.5. Закрыть все смотровые окна модели, собранной в «Simulink» и выполнить программу. Сохранить обучающую кривую для отчёта о лабораторной работе.
- 6.6. Отобразить графически весовые коэффициенты АФ. Найти в массиве весовых коэффициентов, хранящемся в рабочей области («Workspace»), наибольшую погрешность. Сохранить полученные результаты для отчёта.
- 6.7. Построить АЧХ канала связи или её оценку, полученную АФ.
7. Предъявить полученные результаты преподавателю и только после их утверждения выключить приборы.
8. Привести в порядок рабочее место.

Содержание отчёта

1. Титульный лист, цель работы.
2. Краткие теоретические сведения об адаптивных фильтрах и областях их применения.
3. Исходные данные и результаты расчёта домашнего задания.
4. Результаты моделирования: графики и числовые величины.
5. Выводы о полученных результатах.

Контрольные вопросы

1. Что такое АФ? Где они используются?
2. Какие адаптивные алгоритмы вам известны? В чём особенность каждого из них?
3. Чем задача прямого моделирования отличается от задачи обратного моделирования?
4. В чём смысл задачи линейного предсказания? Как решается данная задача с помощью АФ?
5. В чём особенность задач адаптивного подавления шума, компенсации эхо-сигналов, формирования диаграмм направленности антенных решёток?
6. Как влияет выбор параметра шага адаптации μ в алгоритме НСКО на процесс настройки его устойчивости АФ?
7. Какой алгоритм лучше: НСКО или наискорейшего спуска? В чём трудность реализации алгоритма наискорейшего спуска на практике?
8. В каких случаях удобен нормированный алгоритм НСКО?

Библиографический список

1. Адаптивные фильтры: пер. с англ. / Под ред. К.Ф.Н. Коуэна и П.М. Гранта. — М.: Мир, 1988. — 392 с.
2. Прокис Дж. Цифровая связь: Пер. с англ. / Под ред. Д.Д. Кловского. — М.: Радио и связь, 2000. — 800 с.
3. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. — М.: Вильямс, 2003.
4. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов: пер с англ. — М.: Радио и связь, 1989. — 440 с.
5. Уидроу Б. и др. Комплексная форма алгоритма НСКО // ТИИ-ЭР. — № 3, 1975. — С. 49—51.

