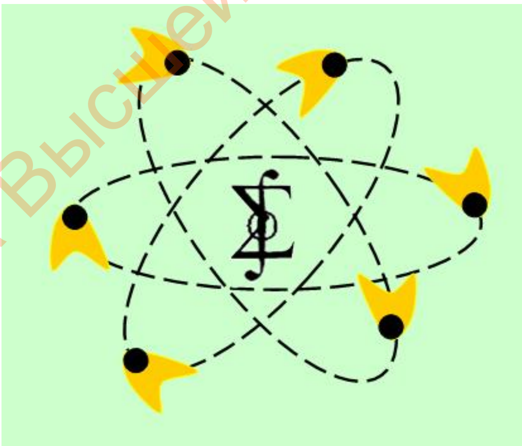
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

**К.В. БУХЕНСКИЙ, А.Б. ДЮБУА,
А.Н. КОНЮХОВ, С.И. КУЧЕРЯВЫЙ,
С.Н. МАШНИНА, Ю.К. ОЛЕНИКОВА,
В.Ш. РОЙТЕНБЕРГ, А.С. САФОШКИН**

СТУДЕНЧЕСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

Часть 3



Рязань 2017

Министерство образования и науки Российской Федерации

Рязанский государственный радиотехнический университет

К.В. БУХЕНСКИЙ, А.Б. ДЮБУА,
А.Н. КОНЮХОВ, С.И. КУЧЕРЯВЫЙ,
С.Н. МАШНИНА, Ю.К. ОЛЕНИКОВА,
В.Ш. РОЙТЕНБЕРГ, А.С. САФОШКИН

СТУДЕНЧЕСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

Часть 3

Учебное пособие

Рязань 2017

УДК 512.8/514.122/517

Студенческие математические олимпиады. Часть 3: учеб. пособие / К.В. Бухенский, А.Б. Дюбуа, А.Н. Конюхов, С.И. Кучерявый, С.Н. Машнина, Ю.К. Оленикова, В.Ш. Ройтенберг, А.С. Сафошкин; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2017. – 84 с.

Представлен подробный разбор «типовых» олимпиадных задач по числовым и функциональным рядам.

Предназначено для индивидуальной и факультативной работы студентов, для подготовки к математическим олимпиадам.

Библиогр.: 16 назв.

Числовой ряд, функциональный ряд, степенной ряд

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета (доц., канд. технич. наук А.В. Кузнецов)

ГЛАВА 6. РЯДЫ

1. Вычисление сумм числовых рядов

Напомним читателю, что по определению числовым рядом называется бесконечная сумма членов заданной числовой последовательности $\{a_n\}$:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...,$$

$n-$частичной суммой ряда называется конечная сумма первых его членов

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Если существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

то этот предел называется суммой ряда, а сам ряд – сходящимся.

При вычислении конечных сумм часто используется метод математической индукции.

6.1. Доказать равенство

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} . \qquad (1)$$

Решение. При $n=1$ равенство верно. Нужно доказать, что из предположения справедливости формулы (1) следует справедливость равенства

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} . \qquad (2)$$

Прибавляя к обеим частям верного равенства (1) слагаемое $(n+1)^2$, получаем:

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 . \qquad (3)$$

Преобразуя правую часть, находим:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} .$$

Таким образом, равенство (2) является верным, и поэтому формула (1) справедлива при любом $n \in \mathbb{N}$.

Задачу о нахождении суммы вида $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ обычно рассматривают как задачу о представлении S_n в виде функции от n, удобной для вычислений.

Например, пусть последовательность $\{b_k\}$ такая, что для всех $k\in\mathbb{N}$ справедливо равенство $a_k=b_{k+1}-b_k$, тогда

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(b_{k+1}-b_k\right)=b_2-b_1+b_3-b_2+\ldots+b_n-b_{n-1}+b_{n+1}-b_n,$$

откуда получаем:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(b_{k+1}-b_k\right)=b_{n+1}-b_1. \qquad (4)$$

6.2. Решим задачу **6.1** указанным способом.

Решение. Воспользуемся тождеством

$$(x+1)^3-x^3=3x^2+3x+1.$$

Полагая $x=1,2,\ldots,n$ и складывая получаемые равенства, находим:

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+n.$$

С учетом (4),

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)=(n+1)^3-1=3\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{n(n+1)}{2}+n,$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Вычисление сумм можно последовательно продолжить, используя результат задачи **6.2.** Предлагаем читателю убедиться, что, используя тождество

$$(x+1)^4-x^4=4x^3+6x^2+4x+1,$$

можно получить сумму

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}, \text{ и т.д.}\ldots.$$

<u>**Замечание.**</u> Весьма остроумное решение представлено для задачи, предложенной в 1998 году в МФТИ.

а) Докажите, что существует многочлен $P(x)$ такой, что для любого натурального числа n

$$\int_{n-1}^{n} P(x)dx = n^4 \ .$$

б) Найти сумму $\sum_{k=1}^{n} k^4$.

Решение

а) Будем искать многочлен $P(x)$ в виде:

$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

Вычислив интеграл и приравняв коэффициенты при степенях n в левой и правой частях, получим линейную систему относительно переменных a, b, c, d , e с треугольной матрицей:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Решая систему, найдем: $P(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - \dfrac{1}{3}$.

б) $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \int_{0}^{n} P(x)dx = \dfrac{n}{30}\left(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1\right)$.

6.3. Найдите сумму сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2n^2}$.

Решение. Найдём частичную сумму

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2} \ .$$

Для этого воспользуемся тождествами

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy},$$

$$\frac{1}{2n^2} = \frac{\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}}{1+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}}.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{k}\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2} = \sum_{n=1}^{k}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2n-1} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2n+1}\right) = \operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}\frac{1}{2k+1},$$

а сумма ряда равна

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2} = \lim_{k\to\infty}\left(\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}\frac{1}{2k+1}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}$.

6.4. Найти сумму ряда: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{n^4+4}$.

Решение

Найдём частичную сумму

$$S_n = \sum_{n=1}^{n}\frac{4n}{n^4+4}.$$

Для этого разложим знаменатель на множители:

$$n^4+4 = \left(n^2-2n+2\right)\left(n^2+2n+2\right).$$

Отсюда легко получить:

$$\frac{4n}{n^4+4} = \frac{1}{n^2-2n+2} - \frac{1}{n^2+2n+2} = \frac{1}{(n-1)^2+1} - \frac{1}{(n+1)^2+1}.$$

Тогда, частичная сумма данного ряда:

$$S_n = \frac{1}{0^2+1} - \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{1^2+1} - \frac{1}{3^2+1} + \frac{1}{2^2+1} - \frac{1}{4^2+1} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{(n-1)^2+1} - \frac{1}{(n+1)^2+1} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{(n+1)^2+1}$$

Таким образом, сумма ряда равна

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

6.5. Найти сумму ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)2^n}$.

Решение

Перепишем первоначальный ряд в виде:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)2^n}.$$

Это допустимо, так как оба ряда очевидно сходятся. Далее, увеличим степень второй суммы на единицу, изменим индекс суммирования с $n+1$ на n, добавим и вычтем член ряда с $n=1$. Получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)2^n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}=2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}=2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}-1.$$

Тогда:

$$s=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}-2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}+1=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}.$$

Обозначим, используя разложение Тейлора:

$$f(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\ln(1-x),\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}=\ln\left(\frac{1}{2}\right).$$

Отсюда находим:

$$S=1-\ln 2.$$

Ответ: $1-\ln 2$.

6.6. Найти сумму ряда[1]: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)}$.

Решение 1

Пусть

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{4k+4}}{(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)}.$$

Этот степенной ряд сходится при $|x|\le 1$, вычислим $F(1)$.

[1] Задача предлагалась на IMC2010

$$F^{IV}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x^{4k}=\frac{1}{1-x^4}.$$

$$F(0)=F'(0)=F''(0)=F'''(0)=0.$$

$$F'''(y)=F'''(0)+\int_0^y F^{IV}(x)\,dx=$$

$$=\int_0^y\frac{dx}{1-x^4}=\frac{1}{2}\arctan y+\frac{1}{4}\ln(1+y)-\frac{1}{4}\ln(1-y).$$

$$F''(z)=F''(0)+\int_0^z F'''(y)\,dx=$$

$$=\int_0^z\left(\frac{1}{2}\arctan y\frac{1}{4}\ln(1+y)+\frac{1}{4}\ln(1-y)\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\left(z\arctan z-\int_0^z\frac{y}{1+y^2}\,dy\right)+\frac{1}{4}\left((1+z)\ln(1+z)-\int_0^z dy\right)+$$

$$+\frac{1}{4}\left((1-z)\ln(1-z)+\int_0^z dy\right)=$$

$$=\frac{1}{2}z\arctan z-\frac{1}{4}\ln\left(1+z^2\right)+\frac{1}{4}(1+z)\ln(1+z)+\frac{1}{4}(1-z)\ln(1-z).$$

$$F'(t)=\int_0^t\left(\frac{1}{2}z\arctan z-\frac{1}{4}\ln\left(1+z^2\right)\right)dt+$$

$$+\int_0^t\left(\frac{1}{4}(1+z)\ln(1+z)+\frac{1}{4}(1-z)\ln(1-z)\right)dt=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\left(1+t^2\right)\arctan t-t\right)-\frac{1}{4}\left(t\ln\left(1+t^2\right)-2t+2\arctan t\right)+$$

$$+\frac{1}{8}\left((1+t)^2\ln(1+t)-t-\frac{1}{2}t^2\right)-\frac{1}{8}\left((1-t)^2\ln(1-t)+t-\frac{1}{2}t^2\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(-1+t^2\right)\arctan t-\frac{1}{4}t\ln\left(1+t^2\right)+\frac{1}{8}(1+t)^2\ln(1+t)-$$

$$-\frac{1}{8}\left(1-t^2\right)\ln(1-t).$$

$$F(1)=\frac{1}{4}\int_0^1\left(\left(-1+t^2\right)\arctan t-t\ln\left(1+t^2\right)\right)dt+$$

$$+\frac{1}{8}\int_0^1\left(\left(1+t\right)^2\ln\left(1+t\right)-\left(1-t\right)^2\ln\left(1-t\right)\right).$$

Интегрируя, получаем: $F\left(1\right)=\frac{\ln 2}{4}-\frac{\pi}{24}$.

Замечание. Вычисления можно существенно упростить, изменив порядок интегрирования:

$$F\left(1\right)=\int_{t=0}^{1}\int_{z=0}^{t}\int_{y=0}^{z}\int_{x=0}^{y}\frac{1}{1-x^4}dxdydzdt=\int_{x=0}^{1}\frac{1}{1-x^4}\int_{y=x}^{1}\int_{z=y}^{1}\int_{t=z}^{1}dtdzdydz=$$

$$=\int_{x=0}^{1}\frac{1}{1-x^4}\left(\frac{1}{6}\int_{y=x}^{1}\int_{z=x}^{1}\int_{t=x}^{1}dtdzdy\right)dx=\int_0^1\frac{1}{1-x^4}\frac{\left(1-x\right)^3}{6}dx$$

$$=\left(-\frac{1}{6}\arctan x-\frac{1}{12}\ln\left(1+x^2\right)+\frac{1}{3}\ln\left(1+x\right)\right)\Big|_0^1=\frac{\ln 2}{4}-\frac{\pi}{24}.$$

Решение 2

Пусть $A_m=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{\left(4k+1\right)\left(4k+2\right)\left(4k+3\right)\left(4k+4\right)}$.

Раскладывая на простые дроби, получаем:

$$A_m=\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{6}\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{4k+2}+\frac{1}{2}\frac{1}{4k+3}-\frac{1}{6}\frac{1}{4k+4}\right).$$

Обозначим:

$$B_m=\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{4k+3}\right),$$

$$C_m=\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{4k+2}+\frac{1}{4k+3}-\frac{1}{4k+4}\right),$$

$$D_m=\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{4k+2}-\frac{1}{4k+4}\right).$$

Легко убедиться, что $A_m=\frac{1}{3}C_m-\frac{1}{6}B_m-\frac{1}{6}D_m$.

Тогда искомая сумма будет равна

$$\lim_{m\to\infty}A_m=\lim_{m\to\infty}\frac{2C_m-B_m-D_m}{6}=\frac{2\ln 2-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2}{6}=\frac{1}{4}\ln 2-\frac{\pi}{24}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}\ln 2-\frac{\pi}{24}$.

6.7. Найти сумму ряда[2]: $\sum_{n=0}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)$.

Решение

Обозначим $f(n)=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ для $n\geq 1$, и заметим, что $f(2n)+f(2n+1)=f(n)$. Из известного неравенства $\ln(1+x)\leq x$ следует, что $f(n)\leq 1/n$. Тогда

$$g(n)=\sum_{k=n}^{2n-1} f^3(k)<nf^3(n)\leq\frac{1}{n^2}.$$

Далее:

$$g(n)-g(n+1)=f^3(n)-f^3(2n)-f^3(2n+1)=$$
$$=\left(f^3(2n)+f^3(2n+1)\right)^3-f^3(2n)-f^3(2n+1)=$$
$$=3\left(f(2n)+f(2n+1)\right)f(2n)f(2n+1)=$$
$$=3f(n)f(2n)f(2n+1).$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{N} f(n)f(2n)f(2n+1)=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N}\left(g(n)-g(n+1)\right)=\frac{1}{3}\left(g(1)-g(N+1)\right).$$

Так как $g(N+1)\to 0$ при $N\to\infty$, то искомая сумма ряда равна

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)f(2n)f(2n+1)=\frac{1}{3}g(1)=\frac{1}{3}\ln^2(2).$$

Ответ: $\frac{1}{3}\ln^2(2)$.

6.8. Найти сумму числового ряда: $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}+\ldots$.

Решение

Преобразуем исходный ряд:

$$s=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}+\ldots=$$

---

[2] Задача предлагалась на IMC2011

$$=\frac{1}{2}+\frac{2+1}{2^2}+\frac{2+3}{2^3}+\frac{2+5}{2^4}+\ldots+\frac{2+2n-3}{2^n}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{2n-3}{2^n}+\ldots.$$

Заметив, что чётные члены ряда образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q=1/2$, перегруппируем ряд следующим образом: первый член оставим без изменения, далее запишем геометрическую прогрессию, а затем остальные члены ряда. Такая перегруппировка допустима, так как исходный ряд и геометрическая прогрессия сходятся. Имеем:

$$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{2n-3}{2^n}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\ldots+\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-3}{2^{n-1}}+\frac{2n-1}{2^n}+\ldots\right).$$

Выражение в скобках есть исходный ряд. Поэтому справедливо равенство: $S=\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}S$. Откуда: $S=3$.

Ответ: $S=3$.

6.9. Найти сумму ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2-n+1}$.

Решение

Рассмотрим частичную сумму ряда:

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{n^2-n+1}=\sum_{n=1}^{N}\operatorname{arc\,tg}\frac{n-(n-1)}{1+n(n-1)}.$$

Так как $\operatorname{arc\,tg}x-\operatorname{arc\,tg}y=\operatorname{arc\,tg}\frac{x-y}{1+xy}$, то есть

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\left(\operatorname{arc\,tg}n-\operatorname{arc\,tg}(n-1)\right)=\operatorname{arc\,tg}N-\operatorname{arc\,tg}(N-1)-$$

$$-\operatorname{arc\,tg}(N-2)+\ldots+\operatorname{arc\,tg}2-\operatorname{arc\,tg}1+\operatorname{arc\,tg}1-\operatorname{arc\,tg}0=\operatorname{arc\,tg}N.$$

Тогда сумма исходного ряда будет равна

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2-n+1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2-n+1}=\lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg}N=\frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

6.10. Найти сумму числового ряда:

$$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}+\ldots$$

Решение

Для решения воспользуемся тригонометрическими тождествами

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4},$$

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}=\frac{\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{4}}}{2}=\frac{\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{\pi}{8}}}{2}=\sin\frac{\pi}{8},$$

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2-\cos\frac{\pi}{4}}}}{2}=\frac{\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{8}}}{2}=\frac{\sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{16}}}{2}=\sin\frac{\pi}{16}.$$

Тогда $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{....}}}}=\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

В получившемся тождестве всего n корней. Исходный ряд в этом случае представляет собой геометрическую прогрессию и будет равен

$$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}+\ldots=$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{16}+\ldots+\frac{\pi}{2^{n+1}}+\ldots=\pi\left(\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

6.11. Вычислить сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-n^2-2n-1}{n!}$.

Решение

Пусть S и S_N - сумма и частичная сумма ряда соответственно.

Преобразуем ряд

$$\frac{n^3-n^2-2n-1}{n!}=\frac{n^2}{(n-1)!}-\frac{(n+1)^2}{n!}$$

и положим $a_n=\dfrac{n^2}{(n-1)!}$.

Тогда частичная сумма ряда равна

$$s_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{n^3-n^2-2n-1}{n!}=\sum_{n=1}^{N}(a_n-a_{n+1})=a_1-a_{N+1}=1-\frac{(N+1)^2}{N!}$$

Так как $\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{(N+1)^2}{N!}=0$, то $S=\lim\limits_{N\to\infty}S_N=\lim\limits_{N\to\infty}\left(1-\dfrac{(N+1)^2}{N!}\right)=1$.

Ответ: $S=1$.

6.12. Доказать, что при любом натуральном n имеет место равенство

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

Решение

Для решения применим метод математической индукции. При $n=1$ имеем $1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$. Запишем теперь доказываемое равенство при $n=k+1$ и при $n=k$.

При $n=k+1$ получим:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}=$$

$$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}.$$

При $n=k$ получим:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k}.$$

Вычитая почленно эти два равенства, получаем:

$$\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(k+1)}=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}$$

или

$$\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2(k+1)}=\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}.$$

Таким образом, получили истинное равенство:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}=$$

$$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}.$$

Итак, если истинно равенство

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}=$$

$$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2},$$

то истинно и равенство

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k}.$$

Следовательно, в силу математической индукции равенство

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

справедливо при любом $n\in\mathbb{N}$.

6.13. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$, если

$$a_0=1,\qquad \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{4}+(-1)^n\frac{1}{2}.$$

Решение

Из условий задачи следует, что

$$a_1=\frac{3}{4}+(-1)^0\frac{1}{2}=\frac{5}{4};\qquad a_2=\frac{5}{4}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{16},\ldots$$

$$\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{3}{4}+(-1)^{n+1}\frac{1}{2}\right).$$

$$\left(\frac{3}{4}+(-1)^n\right)\frac{1}{2}=\frac{9}{16}-\frac{1}{4}=\frac{5}{16}.$$

Следовательно, члены ряда с нечётными и четными номерами – геометрические прогрессии со знаменателем 5/16 и с первым членом $a_1 = 5/4$ (для нечетных) и $a_0 = 1$ (для четных). Тогда N-я частичная сумма ряда равна

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n = S_1(N) + S_2(N),$$

где $S_1(N)$ - сумма чётных членов, $S_2(N)$ - сумма нечётных членов. Окончательно получаем:

$$S = \lim_{N\to\infty} S_1(N) + \lim_{N\to\infty} S_2(N) = \frac{1}{1-\frac{5}{16}} + \frac{\frac{5}{4}}{1-\frac{5}{16}} = \frac{16}{11} + \frac{5\cdot 16}{11\cdot 4} = \frac{36}{11}.$$

Ответ: $S = \dfrac{36}{11}$.

6.14. Найти сумму ряда: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}$.

Решение

Преобразуем общий член ряда

$$a_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}(-1)} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Тогда сумма ряда будет равна

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \ldots - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1$$

Ответ: $S = 1$.

6.15. Вычислить сумму ряда $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^n n!}\cos\frac{\pi n}{2}$.

Решение

Так как $\cos\dfrac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k-1 \\ (-1)^k, & n = 2k \end{cases}$.

С учетом того, что в сумме ряда будут присутствовать только чётные члены, общий член ряда будет равен

$$a_n = \frac{\pi^n}{3^n n!}\cos\frac{n\pi}{2} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2n}.$$

При использовании разложения косинуса в ряд Тейлора

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

искомая сумма будет равна

$$S = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi^n}{3^n n!}\cos\frac{n\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2n} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $S = \frac{1}{2}$.

6.16. Найти сумму ряда: $S = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)!}$

Решение

Введём $f(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{3x^4}{4!} + \ldots$, тогда $S = f(1)$.

$f'(x) = x = x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \ldots = xe^x$. $f(x) = \int_0^x xe^x dx = xe^x - e^x + 1$.

Откуда: $S = f(1) = 1$.

Ответ: $S = 1$.

6.17. Пусть числовая последовательность b_n задана формулами:

$$b_0 = 1,\ b_n = 2 + \sqrt{b_{n-1}} - 2\sqrt{1 + \sqrt{b_{n-1}}}.$$

Найти сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n 2^n$.[3]

Решение

Положим $a_n = 1 + \sqrt{b_n}$ для $n \geq 0$. Тогда

$$a_n = 1,\ a_0 = 2,\ a_n = 1 + \sqrt{1 + a_{n-1} - 2\sqrt{a_{n-1}}} = \sqrt{a_{n-1}}.$$

Отсюда $a_n = 2^{2^{-n}}$. Далее,

---

[3] Задача предлагалась на IMC1995

$$\sum_{n=1}^{N} b_n 2^n = \sum_{n=1}^{N} (a_n - 1)^2 2^n = \sum_{n=1}^{N} \left(a_n{}^2 2^n - a_n 2^{n+1} + 2^n \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \left((a_{n-1} - 1) 2^n - (a_n - 1) 2^{n+1} \right) = (a_0 - 1) 2^1 - (a_N - 1) 2^{N+1} = 2 - 2 \frac{2^{2^{-N}} - 1}{2^{-N}}.$$

Положим $x = 2^{-N}$, при $x \to 0$ и $N \to \infty$ следует:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n 2^N = \lim_{N\to\infty} \left(2 - 2 \frac{2^{2^{-N}} - 1}{2^{-N}} \right) = \lim_{x\to 0} \left(2 - 2 \frac{2^x - 1}{x} \right) = 2 - 2\ln 2 .$$

Ответ: $2 - 2\ln 2$.

6.18. **а)** Покажите, что если $\{x_i\}$ - убывающая последовательность положительных членов, то она удовлетворяет неравенству

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{i}} .$$

б) Покажите, что существует постоянная c такая, что, если $\{x_i\}$ представляет собой убывающую последовательность положительных членов, то справедливо неравенство[4]

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m}} \left(\sum_{i=m}^{\infty} x_i{}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le c \sum_{i=1}^{\infty} x_i .$$

Решение

а) Из очевидной цепочки преобразований следует, что

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{i}} \right)^2 = \sum_{i,j}^{n} \frac{x_i x_j}{\sqrt{i}\sqrt{j}} \ge \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{i}} \sum_{j=1}^{i} \frac{x_i}{\sqrt{j}} \ge \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{i}} i \frac{x_i}{\sqrt{i}} = \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 .$$

б) Аналогично

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m}} \left(\sum_{i=m}^{\infty} x_i{}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=m}^{\infty} \frac{x_i}{\sqrt{i-m+1}} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \sum_{m=1}^{i} \frac{1}{\sqrt{m}\sqrt{i-m+1}} .$$

Получим верхнюю границу $\sup\limits_i \sum_{m=1}^{i} \frac{1}{\sqrt{m}\sqrt{i-m+1}}$.

---

[4] Задача предлагалась на IMC1998

Так как $\int\limits_0^{i+1} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{i+1-x}}dx = \pi$, то

$$\sum_{m=1}^{i}\frac{1}{\sqrt{m}\sqrt{i-m+1}} = 2\sum_{m=1}^{\frac{i}{2}}\frac{1}{\sqrt{m}\sqrt{i+1-m}} \le 2\frac{1}{\sqrt{\frac{i}{2}}}\sum_{m=1}^{\frac{i}{2}}\frac{1}{\sqrt{m}} \le 2\frac{1}{\sqrt{\frac{i}{2}}}2\sqrt{\frac{i}{2}} = 4$$

6.19. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, если $a_n = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(n+1)^{2m}}$.

Решение

$$a_n = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(n+1)^{2m}} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^m}{m} = \left| x = \frac{1}{(n+1)^2} \right| = -\ln(1-x) = -\ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{(n+1)2}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right) =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln n - 2\ln(n+1) + \ln(n+2)\right).$$

Рассмотрим частную сумму ряда:

$$S_N = -(\ln 1 - 2\ln 2 + \ln 3 + \ln 2 - 2\ln 3 + \ln 4 + \ln 3 - 2\ln 4 + \ldots$$

$$\ldots + \ln(N-1) - 2\ln N + \ln(N+1) + \ln N - 2\ln(N+1) + \ln(N+2)) =$$

$$= \ln 2 + \ln\frac{N+1}{N+2}.$$

Тогда $S = \lim\limits_{N\to\infty} S_N = \lim\limits_{N\to\infty}\left(\ln 2 + \ln\frac{N+1}{N+2}\right) = \ln 2$.

Ответ: $\ln 2$.

6.20. Доказать тождество:

$$\cos^n\frac{\pi}{n} + \cos^n\frac{2\pi}{n} + \ldots + (-1)^n\cos^n\frac{(n-1)\pi}{n} = 1 - \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Решение

Перепишем левую часть тождества:

$$\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1}\cos^n\frac{j\pi}{n} = -\left(\sum_{j=1}^{n-1}\cos^n\frac{j\pi}{n} - 1\right) = 1 - \sum_{j=1}^{n-1}\cos^n\frac{j\pi}{n}.$$

Положим: $\omega = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$.

По формуле Муавра $\omega^{\pm j} = \cos\frac{\pi j}{n} \pm i\sin\frac{\pi j}{n}$.

А поэтому $\cos\frac{\pi j}{n} = \frac{1}{2}\left(\omega^{j} + \omega^{-j}\right)$ и $-1 = \omega^{n}$.

Рассмотрим

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{j}\cos^{n}\frac{\pi j}{n} = \sum_{j=0}^{n-1}\omega^{nj}\left(\frac{\omega^{j}+\omega^{-j}}{2}\right)^{n} =$$

$$= \frac{1}{2^{n}}\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{nj}\sum_{k=0}^{n}c_{n}^{k}\omega^{j(n-2k)} = \frac{1}{2^{n}}\sum_{k=0}^{n}c_{n}^{k}\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{j(2n-2k)}.$$

Последняя сумма – геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \omega^{2n-2k}$. Поэтому, если $k \neq 0$ или $k \neq n$, то

$$\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{j(2n-2k)} = \frac{1-\omega^{(2n-2k)n}}{1-\omega^{2n-2k}} = \frac{1-(-1)^{2n-2k}}{1-\omega^{2n-2k}} = 0.$$

Если $k = 0$ или $k = n$, эта сумма равна n. Отсюда получим:

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{j}\cos^{n}\frac{j\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

6.21. Найти сумму ряда: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{2}-1}$.

Решение

Преобразуем ряд к виду $s = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{2}-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$.

Преобразуем частичную сумму ряда к виду $s_{n} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$.

Получаем: $s_{n} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}\right)$.

Отсюда: $s = \lim_{n\to\infty}s_{n} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{4}$.

Ответ: $\frac{3}{4}$.

6.22. Найти сумму ряда: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n(n+1)}{n!}$.

Решение

Рассмотрим степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2x)^{n+1}}{n!}=2xe^{2x}$ (1)

Продифференцируем степенной ряд (1) почленно, получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n 2^{n+1}}{n!}=\left(2xe^{2x}\right)';\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n 2^n 2}{n!}=2e^{2x}+4xe^{2x};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n 2^n}{n!}=e^{2x}(1+2x).$$

Положим $x=1$, получим: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)2^n}{n!}=3e^2$.

Ответ: $3e^2$.

6.23. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\cos\dfrac{\pi}{2^n}$.

Решение

$S_N=\sum\limits_{n=2}^{N}\ln\cos\dfrac{\pi}{2^n}=\ln(\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{8}$ [redacted] $s\dfrac{\pi}{2^N})$.

Так как

$$\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cdots\cos\frac{\pi}{2^N}=\frac{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\quad\cos\frac{\pi}{2^N}\sin\frac{\pi}{2^N}}{\sin\frac{\pi}{2^N}}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2^{N-1}\sin\frac{\pi}{2^N}}=$$

$$=\frac{1}{2^{N-1}\sin\frac{\pi}{2^N}},$$

то $S_N=-\ln 2^{N-1}\sin\dfrac{\pi}{2^N}$.

По определению, сумма ряда

$$S=\lim_{N\to\infty}S_N=-\lim_{N\to\infty}\ln(2^{N-1}\sin\frac{\pi}{2^N})=-\ln\lim_{N\to\infty}2^{N-1}\sin\frac{\pi}{2^N}=-\ln\lim_{N\to\infty}2^{N-1}\cdot\frac{\pi}{2^N}=-\ln\frac{\pi}{2}$$

Ответ: $\ln 2-\ln\pi$.

6.24. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n\,n!}\sum\limits_{k=1}^{n}k\,k!$.

Решение

$$\sum_{k=1}^{n} k\,k! = \sum_{k=1}^{n}((k+1)-1)\,k! = \sum_{k=1}^{n}((k+1)!-k!) = (n+1)!-1\,.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot n!}\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!-1}{n\cdot n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot n!} = 1\,.$$

Ответ: 1.

6.25. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{10^n}$ с точностью до 0,005.

Решение

Так как при $n \ge 4$ $\dfrac{(n+1)^2}{10^{n+1}} : \dfrac{n^2}{10^n} < \dfrac{5^2}{4^2\cdot 10} < \dfrac{1}{5}$, то

$$r_3 = \frac{4^2}{10^4} + \frac{5^2}{10^5} + \ldots \le \frac{4^2}{10^4}\left(1 + \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \ldots\right) \le 0,0016\frac{1}{1-\frac{1}{5}} = 0,0016\cdot\frac{5}{4} \le 0,005$$

и $S = S_3 = \dfrac{1^2}{10} + \dfrac{2^2}{10^2} + \dfrac{3^2}{10^3} = 0,1 + 0,04 + 0,009 = 0,149 \pm 0,005\,.$

Ответ: $0,149 \pm 0,005\,.$

6.26. Найти сумму ряда: $s = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \dfrac{3}{4!} + \ldots\,.$

Решение

Введём $f(x) = \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{2x^3}{3!} + \dfrac{3x^4}{4!} = \ldots$; тогда $s = f(1)\,.$

$$f'(x) = x = x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \ldots = xe^x\,.$$

$f(x) = \int\limits_0^x xe^x dx = xe^x - e^x + 1$. Значит: $s = f(1) = 1\,.$

Ответ: $1\,.$

6.27. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{tg}(k-1)\operatorname{tg}k}{\operatorname{tg}^2 n + n^{\alpha}}$, где $\alpha > 1\,.$

Решение

Общий член суммы можно представить в виде

$$\operatorname{tg}k\operatorname{tg}(k-1) = (1 + \operatorname{tg}k\operatorname{tg}(k-1)) - 1 = \left(\frac{1}{1 + \operatorname{tg}k\operatorname{tg}(k-1)}\right)^{-1} - 1 =$$

$$=\left(\frac{\operatorname{tg}k-\operatorname{tg}(k-1)}{1+\operatorname{tg}k\operatorname{tg}(k-1)}\right)^{-1}(\operatorname{tg}k-\operatorname{tg}(k-1))-1=\operatorname{ctg}1(\operatorname{tg}k-\operatorname{tg}(k-1))-1.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{tg}(k-1)\operatorname{tg}k=\operatorname{ctg}1\sum_{k=1}^{n}(\operatorname{tg}k-\operatorname{tg}(k-1))-n=\operatorname{ctg}1\operatorname{tg}n-n,$$

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{tg}(k-1)\operatorname{tg}k}{\operatorname{tg}^2 n+n^{\alpha}}=\frac{\operatorname{tg}n}{\operatorname{tg}^2 n+n^{\alpha}}\operatorname{ctg}1-\frac{n}{\operatorname{tg}^2 n+n^{\alpha}}.$$

Ясно, что $\frac{n}{\operatorname{tg}^2 n+n^{\alpha}}\le\frac{1}{n^{\alpha-1}}$. Используя неравенство $a^2+b^2\ge 2ab$, получаем $\operatorname{tg}^2 n+n^{\alpha}\ge 2|\operatorname{tg}n|n^{\alpha/2}$ и потому $\frac{|\operatorname{tg}n|}{\operatorname{tg}^2 n+n^{\alpha}}\le\frac{|\operatorname{tg}n|}{2|\operatorname{tg}n|n^{\alpha/2}}=\frac{1}{2n^{\alpha/2}}$. Так как $\frac{1}{2n^{\alpha/2}}\to 0$ и $\frac{1}{n^{\alpha-1}}\to 0$, то искомый предел равен нулю.

Ответ: 0.

6.28. Вычислить $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\pi^n}{3^n n!}\cos\frac{\pi n}{2}$.

Решение Так как $\cos\frac{\pi n}{2}=0$ при $n=2k-1$ и $\cos\frac{\pi n}{2}=(-1)^k$ при $n=2k$, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\pi^n}{3^n n!}\cos\frac{\pi n}{2}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\pi/3)^{2k}}{(2k)!}=\cos\frac{\pi}{3}=0{,}5$.

Ответ: 0,5.

2. Признаки сходимости знакопостоянных числовых рядов

Существует целый класс задач, в которых, нужно, не вычисляя сумму числового ряда

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n,$$

установить существование конечного предела

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k,$$

то есть определить, является ли ряд сходящимся или расходящимся. Для исследования сходимости (расходимости) ряда используются так называемые признаки сходимости (расходимости). Перечислим их.

1. Критерий Коши

Для сходимости числового ряда необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало число $N = N(\varepsilon)$ такое, что при $n > N$ и $p > 0$ было выполнено неравенство

$$\left|S_{n+p} - S_n\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon .$$

В частности, если ряд сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 .$$

Если это условие не выполнено, то ряд расходится.

2. Первый признак сравнения

Пусть, кроме ряда

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... , \qquad (1)$$

имеем ряд

$$b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n + ... \qquad (2)$$

Если при $n \geq N$ выполнено неравенство

$$0 \leq a_n \leq b_n ,$$

то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

<u>**Следствие**</u> (предельный признак сравнения). Если $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$, то ряды (1) и (2) либо сходятся, либо расходятся одновременно.

3. Признак Даламбера

Если $a_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то при $q < 1$ ряд (1) сходится, а при $q > 1$ расходится.

<u>**Следствие**</u> (непредельная форма признака Даламбера).

а) Если существует число $q \in (0;1)$ и номер m такие, что для всех $n \geq m$ выполняется неравенство $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, то ряд сходится;

б) Если существует номер m такой, что для всех $n \geq m$ выполняется неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, то ряд расходится.

4. Признак Коши

Если $a_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, то при $q < 1$ ряд (1) сходится, а при $q > 1$ расходится.

Замечание 1. Если в признаках 4 и 5 $q = 1$, то ряд (1) может как сходиться, так и расходиться, т.е. признак Даламбера – Коши при $q = 1$ не решает вопрос о сходимости ряда (1).

Замечание 2. Из существования предела $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ следует, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ и эти пределы равны. Обратное утверждение является неверным. Поэтому говорят, что признак Коши при исследовании сходимости рядов с положительными членами сильнее признака Даламбера.

5. Интегральный признак Коши

Если $f(x) \geq 0$ - неотрицательная невозрастающая функция, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

сходится и расходится одновременно с интегралом

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx .$$

Признаки 1 – 5 довольно «популярны» в курсе математического анализа для студентов технических вузов. Однако существует ряд «экзотических» признаков, которые могут встретиться в олимпиадных задачах.

6. Признак Раабе

Если $a_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = p$, то при $p < 1$ ряд (1) расходится, а при $p > 1$ сходится.

7. Признак Гаусса

Если $a_n > 0$ и

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

где $|\theta_n| < C$ и $\varepsilon > 0$, то: а) при $\lambda > 1$ ряд (1) сходится; б) при $\lambda < 1$ расходится; в) при $\lambda = 1$ ряд (1) сходится, если $\mu > 1$, и расходится, если $\mu \le 1$.

8. Признак Жамэ

Если $a_n > 0$ и при $n > n_0 \in \mathbb{N}$

$$\left(1 - \sqrt[n]{a_n}\right)\frac{n}{\ln n} = p,$$

то при $p > 1$ ряд (1) сходится, а при $p \le 1$ расходится.

9. Признак Ермакова

Пусть $f(x)$ - положительная монотонно убывающая функция и

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} = \lambda .$$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится при $\lambda < 1$ и расходится, если $\lambda > 1$.

10. Признак Лобачевского

Ряд (1) сходится и расходится одновременно с рядом

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m 2^{-m},$$

где c_m - наибольший номер членов a_n, таких что $a_n \ge 2^{-m}$.

6.29. Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_1 = 1000$ и для любого $n \in N$ $a_{n+1} = \int\limits_0^{a_n} \frac{a_n dx}{\sqrt{x^6 + 3a_n^2}}$?

Решение

Так как ряд знакоположительный, то:

$a_{n+1} = \int\limits_0^{a_n} \frac{dx}{\sqrt{3 + \frac{x^6}{a_n^2}}} \le \int\limits_0^{a_n} \frac{dx}{\sqrt{3}} = \frac{a_n}{\sqrt{3}}$, то: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$, и ряд сходится по непредельному варианту признака Даламбера.

Ответ: сходится.

6.30. Исследовать на сходимость ряд: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln 1+\ln 2+...+\ln n}$.

Решение

Применим признак сравнения.

$$\frac{1}{\ln 1+\ln 2+...+\ln n}>\frac{1}{\ln n},$$

а ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ расходится по интегральному признаку.

Ответ: расходится.

6.31. Доказать, что, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $a_n>0$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^p$, $p>1$ также сходится. Верно ли обратное утверждение?

Решение

Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. Следовательно, начиная с некоторого номера N, все члены ряда удовлетворяют неравенству $0<a_n<1$. Значит, $a_n^p<a_n$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^p$ сходится.

Обратное утверждение неверно. Например, при $p>1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ сходится, а при $p=1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

6.32. Исследовать на сходимость ряд:

$$\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+... .$$

Решение

Так как $\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}$, то получим:

$$\sqrt{2-\sqrt{2}}=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{4}}=2\sin\frac{\pi}{8},\ \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}=2\sin\frac{\pi}{16},$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}=2\sin\frac{\pi}{32}.$$

Продолжая до n-го члена ряда, получаем: $a_n = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$

Так как $\sin x < x$ при $x > 0$, то $a_n = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}} < 2\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2^n}$.

Таким образом, получили ряд $\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, который сходится. Следовательно, исходный ряд также сходится.

Ответ: сходится.

6.33. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n-1}{4^n}$ на сходимость.

Решение

Знаменатель общего члена ряда равен 4^n. Для исследования на сходимость применим признак Даламбера.

$$a_n = \frac{n^2+n-1}{4^n} \text{ - общий член ряда, тогда}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^2+(n+1)-1}{4^{n+1}} = \frac{n^2+2n+1+n}{4^{n+1}} = \frac{n^2+3n+1}{4^{n+1}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n^2+3n+1}{4^{n+1}}}{\frac{n^2+n-1}{4^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+3n+1)4^n}{4^{n+1}(n^2+n-1)} =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+1}{n^2+n-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2+3n+1}{n^2}}{\frac{n^2+n-1}{n^2}} =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{4} < 0.$$

Получили, что исходный ряд сходится.

Ответ: сходится.

6.34. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+2\cos n}$.

Решение

Выпишем частичную сумму ряда с чётным номером:

$$s_{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+2\cos n}=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1+2\cos(2k-1)}-\frac{1}{2k+2\cos 2k}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1+2\cos 2k-2\cos(2k-1)}{(2k-1)+2\cos(2k-1)(2\cos 2k)}.$$

Так как при $k\geq 2$

$$\left|\frac{1+2\cos 2k-2\cos(2k-1)}{(2k-1+2\cos(2k-1))(2+2\cos 2k)}\right|\leq\frac{5}{(2k-3)(2k-2)},$$

а ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5}{(2k-3)(2k-2)}$ сходится, то s_{2m} является m-й частичной суммой абсолютно сходящегося ряда, и потому существует конечный предел $\lim\limits_{m\to\infty}s_{2m}=s$. Так как общий член ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+2\cos n}$ стремится к нулю, то и $\lim\limits_{m\to\infty}s_{2m-1}=s$.

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$ и ряд сходится.

Ответ: сходится.

6.35. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3...(2n-1)}{2\cdot 4...(2n)}$?

Решение

$\frac{1\cdot 3...(2n-1)}{2\cdot 4...(2n)}>\frac{1\cdot 2\cdot 4...(2n-2)}{2\cdot 4...(2n)}=\frac{1}{2n}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

По признаку сравнения расходится и данный ряд.

Ответ: расходится.

6.36. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\arctan(n+1)}{\arctan(n)}\right)$?

Решение

Ряд $-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\arctan(n+1)-\arctan(n)}{\arctan(n)}\right)$ сходится одновременно с рядом

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n+1)-arctg(n))=-\frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}(\arctan(n+1)-\arctan 1)=-\frac{1}{2}.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

6.37. Известно, что $a_n \geq 0$ и $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \geq \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$ для любого n. Доказать, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится и его сумма не превосходит $2ea_1$.

Решение

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Рассмотрим суммы

$$S_{2^n} \leq \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^n}\right)S_2 \underset{1+x\leq e^x}{\leq} e^1 e^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2^2}} \ldots e^{\frac{1}{2^n}} S_2 \leq$$

$$\leq \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\right)S_2 = eS_2 = 2ea_1.$$

Ряд с положительными членами, следовательно, S_n возрастает, и ряд сходится, причем он ограничен той же константой.

Ответ: сходится.

6.38. $a_n > 0; \sum a_n$ - сходится, $c_n = a_n - a_{n+1}$ - убывающая последовательность. Доказать, что $a_{n+1}^{-1} - a_n^{-1} \to +\infty$.

Решение

$c_k > 0 (a_k > a_{k+1})$. Действительно, если существует p, что $c_p \leq 0$, то ввиду убывания $c_k, c_k \leq 0$ для любого $k > p$. То есть $a_p \leq a_{p+1} \leq a_{p+2} \leq \ldots$, что противоречит сходимости ряда.

$$a_k a_{k+1} \leq a_k^2 = \left(\sum_{p\geq k} c_p\right)^2 = 2\sum_{p\geq k} c_p \sum_{q\geq p} c_q - \sum_{p\geq k} c_p^2 \leq 2\sum_{p=k}^{\infty} c_p a_p \leq 2c_k \sum_{p=k}^{\infty} a_p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left(a_{k+1}^{-1} - a_k^{-1}\right)^{-1} = \frac{a_k a_{k+1}}{c_k} \leq 2\sum_{p=k}^{\infty} a_p \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

6.39. Известно, что для последовательности $\{x_k\}$ неотрицательных чисел существует такое c, что для $k = 0,1,2,3,\ldots$ $\sum_{n=0}^{\infty} x_n x_{n+k} \leq cx_k$. Доказать, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ сходится.

Решение

$$\left(\sum_{n=0}^{N} x_n\right)^2 = \sum_{n=0}^{N} x_n^2 + 2\sum_{n=0}^{N-1} x_n x_{n+1} + 2\sum_{n=0}^{N-2} x_n x_{n+2} +$$

$$+ \ldots \le \sum_{n=0}^{N} x_n^2 + \sum_{n=0}^{N} x_n x_{n+1} + + \sum_{n=0}^{N} x_n x_{n+2} + \ldots \le 2c\sum_{k=0}^{N} x_k - cx_0.$$

То есть $S_N^2 \le 2cS_n - cx_0$. Это неравенство выполнено только при $S_n \le c + \sqrt{c^2 - cx_0}$, т. е. последовательность S_N монотонна $(x_k \ge 0)$ и ограничена, следовательно, имеет конечный предел.

6.40. Исследовать сходимость ряда

$e^{-|\ln|tg1^o||} + e^{-|\ln|tg1^o|\ln|tg3^o||} + \ldots + e^{-|\ln|tg1^o|\ln|tg3^o|\ldots\ln|tg(2k-1)^o||} + \ldots$.

Решение

Все члены ряда, начиная с $n = 23$, будут иметь в показателе множитель $\ln|tg45^o| = 0$, то есть $a_n = 1$ при $n \ge 23$, следовательно, ряд расходится.

Ответ: ряд расходится.

6.41. Пусть $\{a_n\}$ - монотонно возрастающая положительная последовательность. Доказать, что сходимость ряда $\sum_n \arccos^2\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ равносильна ограниченности a_n.

Решение

Если не выполнено: $\frac{a_n}{a_{n+1}} \to 1$, то ряд расходится. Пусть $\frac{a_n}{a_{n+1}} \to 1$.

Но $\arccos x \sim \sqrt{2(1-x)}$ при $x \to 1-0$, следовательно, данный ряд сходится одновременно с $\sum\left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$, а потому и с рядом $-\sum \ln\frac{a_n}{a_{n+1}}$, частичная сумма которого $S_N = \ln a_1 - \ln a_N$, следовательно, $\{a_n\}$ - ограничена.

6.42. Последовательность x_n такая, что

$x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x_n^2}}{2}}, n = 1, 2, \ldots$. Докажите, что $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < 1{,}025$.

Решение

Имеем: $x_1 = \sin\alpha$, где $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$; $x_2 = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{2}} =$

$= \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}} = \sin\dfrac{\alpha}{2}$.

Аналогично $x_3 = \sin\dfrac{\alpha}{4}, \dots$, и, по индукции, $x_n = \sin\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}, n = 1, 2, \dots$.

Заметим, что $x_n = \sin\dfrac{\alpha}{2^{n-1}} < \dfrac{\alpha}{2^{n-1}}$.

Тогда для $n \geq 2$ $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{k=2}^{n} x_k < \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{\alpha}{2^{k-1}} < \dfrac{1}{2} + \alpha \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{2^{k-1}} =$

$= \dfrac{1}{2} + \alpha = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{6}$.

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится и его сумма не превосходит

$\dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{6}$, но $0{,}5 + \dfrac{\pi}{6} < 0{,}5 + \dfrac{3{,}15}{6} = 1{,}025$.

6.43. Привести пример сходящегося ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ такого, что ряд

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n (\ln n)^{0{,}01}$ расходится.

Решение

Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^{1{,}01}}$ сходится, так как

$$\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{1{,}01}} = -100\left((\ln 2)^{-0{,}01} - \lim_{n\to\infty} (\ln n)^{-0{,}01}\right) < \infty .$$

Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot \ln n}$ расходится, следовательно, условие задачи выполнено.

6.44. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - последовательность положительных чисел, удовлетворяющая при любом $n \ge 1$ условию: $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j \ge \sqrt{n}$.

Доказать, что ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j^2$ расходится.

Решение

Получим оценку снизу для частичной суммы ряда:
$\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^2 \ge \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$, которая сразу же приводит к требуемому результату (ибо гармонический ряд расходится).

Сначала докажем следующее утверждение.

Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ - положительные последовательности такие, что $b_1 > b_2 > \ldots > b_n$ и $\sum\limits_{j=1}^{k} a_j \ge \sum\limits_{j=1}^{k} b_j$ для $k = 1, 2, \ldots n$. Тогда $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^2 \ge \sum\limits_{j=1}^{n} b_j^2$.

Для доказательства возьмем произвольное n и временно зафиксируем его. Положим $b_{n+1} = 0$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1})\sum_{j=1}^{k} b_j \le \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1})\sum_{j=1}^{k} a_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{k=j}^{k}(b_k - b_{k+1}) \le \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=j}^{k}(b_k - b_{k+1}).$$

Значит, $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j^2 \le \sum\limits_{j=1}^{n} b_j a_j$. Возведя обе части в квадрат и использовав неравенство Коши – Буняковского, $\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 \le \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^2\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{n} b_j^2\right)$, получим $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j^2 \le \sum\limits_{j=1}^{n} a_j^2$. Для завершения доказательства нужной оценки осталось выбрать $b_j = \sqrt{j} - \sqrt{j-1} = \frac{1}{\sqrt{j}+\sqrt{j-1}}$. Тогда по доказанной лемме:

$\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^2 \ge \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{\left(\sqrt{j}+\sqrt{j-1}\right)^2} \ge \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{\left(2\sqrt{j}\right)^2} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$, что и требовалось доказать.

6.45. Исследовать на сходимость $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(k!)}$.

Решение

$\dfrac{1}{\ln(n!)}=\dfrac{1}{\ln 1+\ln 2+\ldots+\ln(n)}>\dfrac{1}{n\ln(n)}$. Но $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln(n)}$ расходится (интегральный признак Коши). Значит, рассматриваемый ряд расходится по признаку сравнения.

Ответ: расходится.

6.46. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^3}$.

Решение

По признаку Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\left\|\frac{1}{n}=x\right\|=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}=\exp\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=$$

$$=\exp\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{tg}x}{2x}=\exp\left(-\frac{1}{2}\right)<1 \text{ – ряд сходится.}$$

Ответ: ряд сходится.

6.47. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)!e^{-n^2}$.

Ответ: ряд сходится по признаку Даламбера.

6.48. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ $(a_n>0)$ сходится. Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n)^{a_n}$?

Решение

Так как по условию ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. Убедимся, что $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{a_n}\neq 0$ и, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n)^{a_n}$ расходится.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{a_n}=\lim_{n\to\infty}e^{a_n\ln a_n}=\|a_n=x\|=\exp\lim_{x\to 0}x\ln x=e^0=1\neq 0,$$

так как $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x^{-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{-1}}{-x^{-2}}=\lim\limits_{x\to 0}x=0$.

Ответ: ряд расходится.

6.49. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Решение

Так как $\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\left\|\frac{1}{n}=x\right\|=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}=\exp\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=$

$=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{tg}x}{2x}\right)=\exp\left(-\frac{1}{2}\right)\neq 0$, то ряд расходится.

Ответ: ряд расходится.

6.50. Ряды с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ сходятся.

Сходятся ли ряды: а) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n v_n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n v_n}$?

Решение

а) По условию задачи $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ сходится, т. е. $\lim_{x\to\infty}v_n=0$ и последовательность $\{v_n\}$ ограничена, то есть $\forall n\in\mathbb{N}\quad \exists M>0$: $v_n\le M$. Так как по условию $v_n>0$ и $u_n>0$, то $v_n u_n\le Mu_n$.

По условию ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ – сходится, а значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}Mu_n$ тоже сходится. По признаку сравнения сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n v_n$.

б) Воспользуемся известной формулой, связывающей среднее арифметическое и среднее геометрическое: $\sqrt{u_n v_n}\le\frac{u_n+v_n}{2}$. Так как ряды $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ сходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n+v_n}{2}$ также сходится. По признаку сравнения сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n v_n}$.

Ответ: оба ряда сходятся.

6.51. Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ с положительными членами существует $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n+u_{n+1}}{u_n+u_{n-1}}=a$. Доказать, что при $a<1$ ряд сходится, а при $a>1$ ряд расходится.

Решение

1) Если $a<1$, то по признаку Даламбера сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$. Так как $u_n \le u_n + u_{n+1}$, то по признаку сравнения сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

2) Если $a>1$, то по признаку Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$ расходится. Если при этом ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$. Но тогда должен сходиться и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$. Полученное противоречие доказывает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

6.52. В гармоническом ряде члены с номерами, содержащими в десятичной записи цифру 0, заменим на нули. Доказать, что полученный ряд сходится.

Решение

Обозначим u_n – n-й член рассматриваемого ряда. Число натуральных чисел $10^{m-1} \le n \le 10^m - 1$, в десятичной записи которых не используется цифра ноль, и соответственно число ненулевых членов ряда с такими номерами равно 9^m. Поэтому $u_{10^{m-1}} + \ldots + u_{10^m - 1} \le 9^m / 10^{m-1} = 9(0,9)^{m-1}$. Возьмем произвольное число $n \in \mathbb{N}$и найдем $k \in \mathbb{N}$ такое, что $n \le 10^k - 1$. Тогда n-я частичная сумма ряда

$$s_n = u_1 + \ldots + u_n \le \sum_{m=1}^{k} 9(0,9)^{m-1} \le \sum_{m=1}^{\infty} 9(0,9)^{m-1} = 90 .$$

Так как последовательность s_n не убывает, то существует $\lim_{n\to\infty} s_n$ и ряд сходится.

6.53. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, в котором $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{4} + (-1)^n \frac{1}{2}$?

Решение

Так как $u_{2k-1}=\frac{5}{4}u_{2k-2}=\frac{5}{16}u_{2k-3}$, то $u_{2k-1}=\left(\frac{5}{16}\right)^{k-1}u_1$. Так как $u_{2k}=\frac{1}{4}u_{2k-1}=\frac{5}{16}u_{2k-2}$, а $u_2=\frac{1}{4}u_1$, то $u_{2k}=\left(\frac{5}{16}\right)^{k-1}\frac{1}{4}u_1$.

Геометрические ряды $\sum_{k=1}^{\infty}u_{2k-1}$ и $\sum_{k=1}^{\infty}u_{2k}$ – сходятся, следовательно, сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(u_{2k-1}+u_{2k})=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.

Ответ: сходится.

6.54. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, где $u_n=\int_n^{n+2}\sin(x^3)dx$?

Решение

$$u_n=\int_n^{n+2}\sin(x^3)dx=\left\|t=x^3, x=t^{1/3}\right\|=\frac{1}{3}\int_{n^3}^{(n+2)^3}t^{-2/3}\sin t\,dt=$$

$$=\left\|\begin{matrix} u=\frac{1}{3}t^{-2/3} & du=-\frac{2}{9}t^{-5/3}dt \\ dv=\sin t\,dt & u=-\cos t\end{matrix}\right\|=$$

$$-\frac{1}{3}t^{-2/3}\cos t\Big|_{n^3}^{(n+2)^3}-\frac{2}{9}\int_{n^3}^{(n+2)^3}t^{-5/3}\cos t\,dt=$$

$$=-\frac{1}{3}\frac{\cos(n+2)^3}{(n+2)^2}+\frac{1}{3}\frac{\cos n^3}{n^2}-\frac{2}{9}\int_{n^3}^{(n+2)^3}t^{-5/3}\cos t\,dt .$$

Поэтому $|u_n|\le\frac{2}{3}\frac{1}{n^2}+\frac{2}{9}\int_{n^3}^{(n+2)^3}t^{-5/3}\,dt=\frac{2}{3}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right)\le\frac{1}{n^2}$.

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.

Ответ: ряд сходится.

6.55. Сходится ли ряд $\sum_{n=2}^{\infty}u_n$, где $u_n=\int_n^{\infty}\frac{dx}{x^2\ln^3 x}$?

Решение

Оценим общий член ряда:

$$u_n=\int_n^{\infty}\frac{dx}{x^2\ln^3 x}\le\frac{1}{n}\int_n^{\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2\ln^2 n}=\frac{1}{2n\ln^2 n}.$$

Ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n\ln^2 n}$ сходится по интегральному признаку. По признаку сравнения сходится и ряд $\sum_{n=2}^{\infty}u_n$.

Ответ: исходный ряд сходится.

6.56. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ с положительными членами сходится. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\frac{n}{n+1}}$ также сходится.

Решение

Пусть $u_n=a_n^{\frac{n}{n+1}}$. Обозначим

$$V_n=\begin{cases}u_n & \text{при } u_n<1/2^n,\\ 0 & \text{при } u_n\ge 1/2^n,\end{cases}\qquad W_n=\begin{cases}0 & \text{при } u_n<1/2^n,\\ u_n & \text{при } u_n\ge 1/2^n.\end{cases}$$

Если $u_n=a_n^{\frac{n}{n+1}}\ge\frac{1}{2^n}$, то $a_n^{\frac{1}{n+1}}\ge\frac{1}{2}$, $a_n^{\frac{-1}{n+1}}\le 2$, $u_n=a_n a_n^{\frac{-1}{n+1}}\le 2a_n$.

Так как $0\le V_n<\frac{1}{2^n}$, $0\le W_n<2a_n$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty}V_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}W_n$ – сходятся.

Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}V_n+\sum_{n=1}^{\infty}W_n$ – также сходится.

6.57. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{n^2}$.

Решение

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{n^2}=\exp\left[\lim_{n\to\infty}n^2\ln\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)\right]=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}\right)=\exp 1=e\ne 0,$$

то ряд расходится.

Ответ: ряд расходится.

6.58. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_1 = 100$ и $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_{n+1} = \int_0^1 \frac{a_n^2 dx}{\sqrt{x^4 + 2a_n^2}}$?

Решение

Так как $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 < a_{n+1} = a_n \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 + x^4 / a_n^2}} \le a_n \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2}} = \frac{a_n}{\sqrt{2}}$, то $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, и ряд сходится по непредельному варианту признака Даламбера.

Ответ: ряд сходится.

6.59. Ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{a_n^{a_n}}$?

Решение

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Используя это равенство, а также то, что $\lim_{t\to 0} t \ln t = 0$, $\lim_{t\to 0} t \ln^2 t = 0$ и $e^z - 1 \sim z$ при $z \to 0$, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^{a_n^{a_n}}}{a_n} = \lim_{t\to 0} \frac{t^{t^t}}{t} = \lim_{t\to 0} t^{t^t - 1} = \lim_{t\to 0} \exp((e^{t\ln t} - 1)\ln t) = e^{\lim\limits_{t\to 0}(t\ln^2 t)} = e^0 = 1.$$

По предельному признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{a_n^{a_n}}$ сходится.

Ответ: сходится.

6.60. Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ имеют место равенства $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ и $\lim_{n\to\infty} n^3 (u_{n+1} - u_n) = 0$. Доказать, что ряд сходится.

Решение

Из условия $\lim\limits_{n\to\infty} n^3(u_{n+1}-u_n)=0$ следует, что для некоторого числа $M>0$ $\;n^3\,|u_n-u_{n+1}|\le M$ при всех n. Но тогда $|u_n-u_{n+1}|\le \dfrac{M}{n^3}$ и ряд $\sum\limits_{k=n}^{\infty}(u_k-u_{k+1})$ сходится абсолютно, а его сумма

$$\sum_{k=n}^{\infty}(u_k-u_{k+1})=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=n}^{N}(u_k-u_{k+1})=\lim_{N\to\infty}(u_n-u_{N+1})=u_n-\lim_{N\to\infty}u_{N+1}=u_n.$$

Следовательно, при $n\ge 2$

$$|u_n|\le\sum_{k=n}^{\infty}|u_k-u_{k+1}|\le M\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^3}\le M\int_{n-1}^{\infty}\frac{dk}{k^3}=\frac{M}{2(n-1)^2}.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)^2}$ сходится, то абсолютно сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$.

6.61. Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} n^2\right)$?

Решение 1. Покажем, что $\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} n^2\sim\dfrac{1}{n^2}$ при $n\to\infty$. Действительно,

$$.\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x^2}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\dfrac{2x}{1+x^4}}{-\dfrac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{1+x^4}=1.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится, то по предельному признаку сравнения сходится и заданный ряд.

Решение 2. Обозначим $\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} n^2=u_n$. Тогда $\operatorname{arctg} n^2=\dfrac{\pi}{2}-u_n$, $n^2=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-u_n\right)=\operatorname{ctg} u_n$, $\quad\operatorname{tg} u_n=\dfrac{1}{n^2}$, $\quad u_n=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n^2}\sim\dfrac{1}{n^2}$ и ряд сходится.

Решение 3. Так как функция $f(x)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x^2$, $x\in[1;+\infty)$ положительна и убывает, то можно применить интегральный признак сходимости.

$$\int_1^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x^2\right)dx=\left|\begin{matrix} u=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x^2 & du=-\frac{2xdx}{1+x^4} \\ dv=dx & v=x\end{matrix}\right|=$$

$$=x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x^2\right)\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{2xdx}{1+x^4}.$$

Так как

$$\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x^2\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x^2}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{2x}{1+x^4}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{1+x^4}=0,$$

то $x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x^2\right)\Big|_1^{+\infty}=\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x^2\right)-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$.

Так как $\frac{2x^2}{1+x^4}<\frac{2}{x^2}$, а интеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится, то интеграл $\int_1^{\infty}\frac{2x^2dx}{1+x^4}$, а вместе с ним и интеграл $\int_1^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x^2\right)dx$ также сходится. По интегральному признаку сходится и ряд.

Ответ: сходится.

3. Сходимость и сумма знакопеременных рядов.

Признаки сходимости знакопеременных рядов

1. Признак Лейбница. Знакочередующийся ряд

$$b_1+b_2-b_3+b_4+\ldots+(-1)^{n-1}b_n+\ldots$$

$(b_n\ge 0)$ сходится (вообще говоря, не абсолютно), если:

а) $b_n\ge b_{n+1}$ $(n=1,2,\ldots)$ и б) $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

В этом случае для остатка ряда

$$R_n=(-1)^n b_{n+1}+(-1)^{n+1}b_{n+2}+\ldots$$

имеем оценку $R_n=(-1)^n\theta_n b_{n+1}$ $\quad(0\le\theta_n\le 1)$.

2. Признак Абеля. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \ (3)$$

сходится, если: 1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; 2) числа $b_n \ (n=1,2,\ldots)$ образуют монотонную и ограниченную последовательность.

3. Признак Дирихле. Ряд (3) сходится, если: 1) частные суммы $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ ограничены; b_n монотонно стремится к нулю при $n \to \infty$.

Абсолютная сходимость

Ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_n| . \qquad (2)$$

В этом случае ряд (1) также сходится. Сумма абсолютно сходящегося ряда не зависит от порядка слагаемых.

Для абсолютной сходимости ряда (1) достаточно применить к ряду (2) известные признаки сходимости для знакопостоянных рядов.

Если ряд (1) сходится, а ряд (2) расходится, то ряд (1) называется условно (не абсолютно) сходящимся. Сумму условно сходящегося ряда путём перестановки *слагаемых можно сделать равной любому числу (Теорема Римана).*

6.62. Доказать, что ряд сходится, и найти его сумму:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

Решение

По признаку Лейбница ряд сходится. Так как $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\sim\frac{1}{k}$, а гармонический ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ расходится, то и ряд из абсолютных величин $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ расходится. Поэтому исходный ряд сходится условно.

Рассмотрим частичную сумму ряда:

$$s_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\ln\frac{k+1}{k}=\ln\frac{\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n+1}{2n}}.$$

Обозначив через σ_{2n} выражение, стоящее в круглых скобках под знаком логарифма, получим:

$$\sigma_{2n}=\frac{(2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n)^2}{\left(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\right)^2(2n+1)}=$$

$$=\frac{(2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n)^2(2n+1)}{\left(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)\right)^2}=\left(\frac{\left(2^n n!\right)^2}{(2n+1)!}\right)(2n+1).$$

Применим формулу Стирлинга:

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{2n}\cdot2\pi n\cdot n^{2n}\cdot e^{-2n}}{\sqrt{2\pi\cdot(2n+1)}\cdot(2n+1)^{2n+1}\cdot e^{-2n-1}}\right)^2(2n+1)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{2n}\cdot2\pi n\cdot n^{2n}\cdot e^{-2n}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2n+1}(2n+1)^{2n}(2n+1)e^{-2n}e^{-1}}\right)^2(2n+1)=$$

$$=\lim_{x\to\infty n}\left(\frac{2\pi}{\sqrt{2\pi}}e\frac{1}{(2n)^{2n}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}\frac{n}{2n+1}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)^2(2n+1)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} 2\pi\left(e\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}\right)^2=\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\sigma_{2n}.$$

В силу непрерывности логарифмической функции

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n}=\ln\frac{\pi}{2}.$$

Так как $s_{2n+1}=s_{2n}+\ln\dfrac{2n+2}{2n+1}$, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1}=\ln\frac{\pi}{2}.$$

Ответ: ряд сходится условно к $\ln\dfrac{\pi}{2}$.

6.63. Доказать сходимость ряда и найти его сумму:

$1-\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{4}-\dfrac{7}{8}+\ldots$.

Решение

Общий член ряда $a_n=(-1)^n b_n$, $n\in\mathbb{Z}_+$, $b_n=\dfrac{2n+1}{2^n}$. Так как b_n, начиная с некоторого номера, монотонно стремится к нулю, то по признаку Лейбница, ряд сходится. Последовательность (s_n) частичных сумм этого ряда представляется в виде

$$(s_n)=s_n^{(1)}+s_n^{(2)}+\ldots+s_n^{(n+1)},$$

$$s_n^{(1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2^n}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right),$$

$$s_n^{(2)}=2\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2^n}\right)=\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right),$$

$$\ldots$$

$$s_n^{(k+1)}=2\left(\frac{(-1)^k}{2^k}-\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2^n}\right)=\frac{4}{3}\left(\frac{(-1)^k}{2^k}-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right),$$

$$\ldots$$

$$s_n^{(n)}=\frac{4}{3}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right),$$

$$s_n^{(n+1)}=2\frac{(-1)^n}{2^n}.$$

В результате получаем:

$$s_n=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right)-\frac{2}{3}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{4}{3}\frac{(n-1)(-1)^{n+1}}{2^n}+2\frac{(-1)^n}{2^n}.$$

Следовательно, ряд сходится, так как

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\cdot\frac{-\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}-\frac{4}{9}=\frac{2}{9}.$$

Ответ: $\frac{2}{9}$.

6.64. Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$. Найти сумму ряда, полученного в результате следующей перестановки его членов: после каждой группы из p последовательных положительных членов следует группа из q последовательных отрицательных членов.

Решение

В результате перестановки получим ряд:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2p-1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{2q}+\frac{1}{2p+1}+\frac{1}{2p+3}+\ldots+\frac{1}{4p-1}-\ldots$$

Сумма его будет равна сумме ряда:

$$\begin{gathered}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2p-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2q}\right)+\\+\left(\frac{1}{2p+1}+\frac{1}{2p+3}+\ldots+\frac{1}{4p-1}\right)-\ldots\end{gathered}\qquad(1).$$

Рассмотрим ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2(n-1)p+1}+\frac{1}{2(n-1)p+3}+\ldots+\frac{1}{2np-1}-\frac{1}{2(n-1)q+2}-\frac{1}{2(n-1)q+4}-\ldots-\frac{1}{2nq}\right).$$

Обозначим его (2). Пусть $p>q$. Тогда:

$$s_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2nq}+\frac{1}{2nq+1}+\frac{1}{2nq+3}+\ldots+\frac{1}{2np-1}\quad (3),$$

где s_n - последовательность частичных сумм ряда (2). Прибавим и вычтем в выражении (3) слагаемое

$$\frac{1}{2nq+2}+\frac{1}{2nq+4}+\ldots+\frac{1}{2np}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{nq+1}+\frac{1}{nq+2}+\ldots+\frac{1}{np}\right).$$

Воспользуемся формулой:

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots+\frac{1}{n}=\ln\frac{m}{n}+\varepsilon_{mn},\ \varepsilon_{mn}\to 0 \text{ при } m\to\infty.$$

Из выражения (3) получим:

$$s_n=c_{2np}+\ln\frac{2np}{2nq}-\frac{1}{2}\ln\frac{np}{nq}+\varepsilon_n',\ \varepsilon_n'\to 0 \text{ при } n\to\infty\quad (4),$$

где c_{2np} - чётная последовательность частичных сумм сходящегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Из выражения (4) найдём:

$$s=\lim_{n\to\infty}s_n=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}.$$

При $p\le q$ получаем аналогично тот же результат. Например, при $p=2$ и $q=1$:

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots=\frac{3}{2}\ln 2.$$

При $p=1$ и $q=2$:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots=\frac{1}{2}\ln 2.$$

6.65. Исследовать сходимость знакопеременного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{100}n}{n}\sin\frac{n\pi}{4}.$$

Решение

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi}{4}\right|=\frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\left|\sin\frac{n\pi}{8}\sin\frac{n+1}{8}\pi\right|}<\frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}};$$ последовательность

$$\left(\frac{\ln^{100}n}{n}\right)$$ стремится к 0 при $n\to\infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^{100}x}{x}=100\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^{99}x}{x}=\ldots=0,\ \left(\frac{\ln^{100}x}{x}\right)'<0$$ при любом $x>e^{100}$.

Получаем, что исходный ряд сходится по признаку Дирихле.
Ответ: сходится.
6.66. Исследовать сходимость знакопеременного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}.$$

Решение

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ сходится по признаку Лейбница, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos 2n}{n}$$

сходится в силу ограниченности последовательности

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos 2k\right),$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos 2k\right|=\left|-\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{2\cos 1}\cos(2n-1)\right|<\frac{1+\frac{1}{\cos 1}}{2},\ \frac{1}{n}\to 0$$ при

$$n\to\infty$$

по признаку Дирихле. Следовательно, их полуразность

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(1-\cos 2n)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$$

тоже является сходящимся рядом. Следовательно, исходный ряд сходится.
Ответ: сходится.

6.67. Исследовать абсолютную и условную сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}.$$

Решение

Представим данный ряд в виде $1+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}-\frac{1}{4^p}+\ldots$.

$1+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots$ – ряд, составленный из абсолютных величин данного. Он сходится только при $p>1$, так как при этом условии сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$. При этом члены абсолютно сходящегося ряда можно представить в любом порядке.

При $p=1$ исходный ряд примет вид $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots$.

Он сходится условно.

При $0<p<1$ рассмотрим подпоследовательность частичных сумм данного ряда:

$$(s_{3n})=1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{2n^p}+\frac{1}{(2n+1)^p}+\frac{1}{(2n+3)^p}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{(4n-1)^p}=c_{2n}+\frac{1}{(2n+1)^p}+\frac{1}{(2n+3)^p}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)^p},$$

где c_{2n} - подпоследовательность последовательности сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$.

Так как

$$\frac{1}{(2n+1)^p}+\frac{1}{(2n+3)^p}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)^p}>\frac{1}{(4n-1)^p},\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(4n-1)^p}=\infty,$$

то $\lim\limits_{n\to\infty}s_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}c_{2n}+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(2n+1)^p}+\frac{1}{(2n+3)^p}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)^p}\right)=\infty.$

Следовательно, данный ряд при $0<p<1$ расходится. При $p\le 0$ ряд расходится.

Ответ: ряд абсолютно сходится при $p>1$ и условно при $p=1$.

6.68. Найти сумму ряда: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$.

Решение

Рассмотрим степенной ряд: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1} n}{(2n+1)!}$.

Значение его равно:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1} n}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}(x\cos x-\sin x)$$

при $|x|<\infty$.

Положим $x=1$, получим: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}(\cos 1-\sin 1)$.

Ответ: $\frac{1}{2}(\cos 1-\sin 1)$.

6.69. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$.

Решение

Так как $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}-1=2\ln 2-1.$$

Ответ: $2\ln 2-1$.

6.70. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n+2\cos n}$?

Решение

Выпишем частичную сумму ряда с четным номером:

$$s_{2m}=\sum_{n=1}^{2m}(-1)^{n-1}\frac{1}{n+2\cos n}=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1+2\cos(2k-1)}-\frac{1}{2k+2\cos(2k)}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1+2\cos(2k)-2\cos(2k-1)}{(2k-1+2\cos(2k-1))(2k+2\cos(2k))}.$$

Так как при $k\geq 2$

$$\left|\frac{1+2\cos(2k)-2\cos(2k-1)}{(2k-1+2\cos(2k-1))(2k+2\cos(2k))}\right| \le \frac{5}{(2k-3)(2k-2)},$$

а ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{5}{(2k-3)(2k-2)}$ сходится, то s_{2m} является m-ной частичной суммой абсолютно сходящегося ряда, и потому существует конечный предел $\lim\limits_{m\to\infty} s_{2m} = s$. Так как общий член ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n+2\cos n}$ стремится к нулю, то и $\lim\limits_{m\to\infty} s_{2m+1} = s$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ и ряд сходится.

Ответ: сходится.

4. Функциональные ряды

1. Сходимость и равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов

Мы полагаем, что наш читатель отличает простую сходимость функциональной последовательности и функциональных рядов от равномерной сходимости.

Определение 1. Последовательность функций $\{f_n(x)\}$, сходящуюся в каждой точке множества E, называют сходящейся на этом множестве. В этом случае на множестве E определена предельная функция

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \text{или} \qquad f_n(x)\underset{x\in E}{\to} f(x).$$

По определению предела данная запись означает, что

$$\forall x\in E \quad \forall \varepsilon>0 \quad \exists N=N(\varepsilon,x): \quad \forall n\ge N \to \left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon.$$

Определение 2. Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ называется равномерно сходящейся на множестве E к функции $f(x)$, если

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N=N(\varepsilon): \quad \forall n\ge N \quad \forall x\in E \to \left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon,$$

где $N=N(\varepsilon)$ не зависит от x. В этом случае пишут:

$$f_n(x)\underset{x\in E}{\rightrightarrows} f(x).$$

Другими словами, если существует предельная функция $f(x)$ последовательности функций $\{f_n(x)\}$, но не выполнено условие определения 2, то есть

$$\exists \varepsilon_0 > 0: \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \ge k \quad \exists x \in E: \quad |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon_0,$$

то последовательность функций $\{f_n(x)\}$ называется неравномерно сходящейся на множестве E к функции $f(x)$.

Для доказательства равномерной сходимости последовательности функций $\{f_n(x)\}$ удобно пользоваться утверждением: если существует числовая последовательность $\{a_n\}$ и номер n_0 такие, что

$$\forall n \ge n_0 \quad \forall x \in E \to |f_n(x) - f(x)| \le a_n,$$

причем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то $f_n(x) \underset{x\in E}{\rightrightarrows} f(x)$.

Поясним на примерах.

6.71. Доказать равномерную сходимость последовательности функций $\{f_n(x)\}$ на множестве E.

а) $f_n(x) = \dfrac{n+1}{n+x^2}$, $E = [-1,1]$; б) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$, $E = \mathbb{R}$.

Решение

а) Предельной функцией для $f_n(x) = \dfrac{n+1}{n+x^2}$ для $\forall x \in \mathbb{R}$ будет

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{x^2}{n}} = 1.$$

Значит, $\dfrac{n+1}{n+x^2} \to 1$ на множестве $E = \mathbb{R}$. Докажем равномерную сходимость на множестве $E = [-1,1]$. Так как

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1-x^2}{n+x^2} \le \frac{1}{n} \text{ при } \forall x \in [-1,1],$$

то $\dfrac{n+1}{n+x^2} \rightrightarrows 1$ на множестве $E = [-1,1]$.

б) Предельной функцией для $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}$ для $\forall x\in\mathbb{R}$ будет

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}=|x|.$$

Значит, $\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}\to|x|$ на множестве $E=\mathbb{R}$. Докажем равномерную сходимость на этом множестве. Для этого используем оценку $x^2+\frac{1}{n}\le\left(|x|+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2$. Так как

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|=\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}-|x|\le|x|+\frac{1}{\sqrt{n}}-|x|=\frac{1}{\sqrt{n}},$$

то $\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}\rightrightarrows|x|\quad\forall x\in\mathbb{R}$.

Критерии равномерной сходимости последовательности функций

1. Для того чтобы последовательность функций $\{f_n(x)\}$ равномерно сходилась на множестве E к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in E}\left|f_n(x)-f(x)\right|=0.$$

6.72. Доказать, что последовательность функций $f_n(x)=\frac{2n^2x}{1+n^\alpha x^2}$, где $\alpha>4$, сходится равномерно на множестве $\mathbb{R}$ и найти предельную функцию.

Решение

Пусть $x=0$, т. е. $f_n(0)=0$, поэтому $\lim_{n\to\infty} f_n(0)=f(0)=0$. Если $x\ne0$, то используем оценку $\left|f_n(x)\right|\le\frac{2n^2x}{n^\alpha x^2}=\frac{2}{n^{\alpha-2}|x|}$, откуда следует, что $f_n(x)\to0$ при $n\to\infty$, так как $\alpha>4$. Таким образом, предельная функция $f(x)=0$ на множестве $x\in\mathbb{R}$. Докажем равномерную сходимость на указанном множестве.

Так как при $x \neq 0$ справедливо неравенство $1+n^{\alpha}x^2 \geq 2n^2|x|$, причем это неравенство обращается в равенство лишь при $|x| = n^{-\alpha/2}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)| = \frac{1}{n^{\alpha/2-2}} \to 0.$$

Поэтому $f_n(x) \underset{x\in E}{\rightrightarrows} f(x) = 0$ для $x \in \mathbb{R}$.

6.73. Доказать, что последовательность функций $f_n(x) = x^n - x^{n-1}$ сходится равномерно на множестве $E = [0,1]$ и найти предельную функцию.

Решение

Если $x \in [0,1)$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x^n - x^{n-1}) = 0$, поэтому $f_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть $x = 1$, то $f_n(1) = f(1) = 0$. Следовательно, на множестве $E = [0,1]$ предельной функцией будет $f(x) = 0$, то есть $f_n(x) \underset{x\in E}{\to} 0$.

Докажем равномерную сходимость на указанном множестве.

Чтобы вычислить $\sup\limits_{x\in E}|f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in E}|f(x)|$, найдём точки экстремума функции $f_n(x)$.

Уравнение

$$f_n'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}(n - x(n+1)) = 0$$

имеет внутри отрезка $[0,1]$ единственный корень $x_n = \dfrac{n}{n+1}$, причём $f_n(x_n) = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \dfrac{1}{n}$. Заметим, что $f_n'(x) > 0$ при $x \in (0, x_n)$ и $f_n'(x) < 0$ при $x \in (x_n, 1)$.

Поэтому

$$\sup_{x\in E} f_n(x) = \max_{x\in E} f_n(x) = f_n(x_n) < \frac{1}{n}$$

Для всех $n \in \mathrm{N}$ и , согласно теореме 1, $f_n(x) \to 0$, $x \in [0,1]$.

2. **Критерий Коши.** Для того чтобы последовательность функций $\{f_n(x)\}$ равномерно сходилась на множестве E к

функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N=N(\varepsilon): \quad \forall n \geq N \quad \forall p \in \qquad \forall x \in E \rightarrow \left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|<\varepsilon .$$

Данные критерии удобно использовать для доказательства неравномерной сходимости последовательности функций $\{f_n(x)\}$, т.е. для того чтобы последовательность $\{f_n(x)\}$ не являлась равномерно сходящейся на множестве E, достаточно, чтобы:

а) не выполнялось условие $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in E}\left|f_n(x)-f(x)\right|=0$;

или

б) не выполнялось условие Коши, т.е.

$\exists \varepsilon_0>0: \quad \forall k \in$ [redacted] $\exists x \in E: \quad \left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right| \geq \varepsilon_0$.

6.74. Пример 4 . Доказать, что последовательность $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x)=\dfrac{\ln nx}{\sqrt{nx}}$, не является равномерно сходящейся на множестве $E=(0,1)$.

Решение

Для любого $k \in \mathrm{N}$ возьмём $p=k=n$, $\tilde{x}=\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{n}$, тогда

$$\left|f_{n+p}(\tilde{x})-f_n(\tilde{x})\right|=\left|f_{2n}\left(\frac{1}{n}\right)-f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\left|\frac{\ln 2}{\sqrt{2}}-\ln 1\right|=\frac{\ln 2}{\sqrt{2}}=\varepsilon_0,$$

т. е. выполняется условие 10, и поэтому последовательность $\{f_n(x)\}$ не является равномерно сходящейся на множестве E .

<u>**Определение 3.**</u> Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на множестве E, если на этом множестве определена функция $S(x)$ такая, что

$$S_n(x) \underset{x\in E}{\rightrightarrows} S(x) \text{ где } S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x).$$

По определению 2, ряд равномерно сходится на множестве E, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon): \quad \forall n \ge N \quad \forall x \in E \to \left|S_n(x) - S(x)\right| < \varepsilon .$$

Обозначим $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$ – n-й остаток ряда. Тогда определение 3 эквивалентно утверждению

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon): \quad \forall n \ge N \quad \forall x \in E \to \left|r_n(x)\right| < \varepsilon$$

или, что то же самое: $r_n(x) \underset{x \in E}{\rightrightarrows} 0$.

В силу критерия 1 (см. выше) для равномерной сходимости ряда на множестве E необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in E} \left|r_n(x)\right| = 0 .$$

Если функциональный ряд $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на множестве E, но не выполнены условия определения 3,

$\exists \varepsilon_0 > 0: \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \ge k \quad \exists$ [redacted] $\big)\big| \ge \varepsilon_0$ или $\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in E} \left|r_n(x)\right| \ne 0$,

то данный ряд сходится неравномерно.

6.75. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+nx)(1+(n+1)x)}$ на множествах $E_1 = (\delta, +\infty)$, где $\delta > 0$ и $E_2 = (0, +\infty)$.

Решение

Так как

$$u_n(x) = \frac{1}{1+nx} - \frac{1}{1+(n+1)x}, \text{ то}$$

$$S_n(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+(n+1)x} .$$

Если $x \in E_2$, то $S_n(x) \to S(x)$ при $n \to \infty$, где $S(x) = \frac{1}{1+x}$, и поэтому $r_n(x) = \frac{1}{1+(n+1)x}$.

На множестве E_1 ряд сходится равномерно, так как $\left|r_n(x)\right| \le \frac{1}{1+(n+1)\delta}$, и поэтому выполняется условие равномерной сходимости ряда, а на множестве E_2 - неравномерно, так как $r_n\left(\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}$, и поэтому выполняется условие о неравномерной сходимости ряда.

6.76. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ на множествах $E_1=(-q,q), |q|<1$ и $E_2=(-1,1)$.

Решение

Частичная сумма ряда $S_n(x)=\frac{1-x^n}{1-x}$.

Для любого $x\in E_1, E_2$ сумма ряда $S(x)=\frac{1}{1-x}$, т. е. ряд сходится на множествах E_1 и E_2.

Для любого $x\in E_1$ выполняется неравенство

$$|r_n(x)|=\left|\frac{x^n}{1-x}\right|\le\frac{|x|^n}{1-|x|},$$

откуда следует, что $\sup_{x\in E_1}|r_n(x)|\le\frac{q^n}{1-q}$, и поэтому выполняется условие (18). Следовательно, ряд сходится равномерно на множестве E_1.

На множестве E_2 ряд сходится неравномерно. В самом деле, возьмём $\tilde{x}=1-\frac{1}{n}$, тогда $\tilde{x}\in E$ для любого $n\in N$ и $r_n(\tilde{x})=n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\to+\infty$ при $n\to\infty$, откуда следует, что выполняется условие о неравномерной сходимости ряда.

Для решения задач о равномерной сходимости функциональных рядов полезно использовать **критерий Коши.**

Для того чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ равномерно сходился на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon): \quad \forall n \geq N \quad \forall p \in \qquad \forall x \in E \to \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon .$$

Данное условие является необходимым и достаточным, т.е. если данное условие не выполняется

$$\exists \varepsilon_0 > 0: \quad \forall m \in$$ [redacted] $$\exists x \in E \quad \exists x \in E: \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| > \varepsilon_0 ,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ не является равномерно сходящимся на множестве E.

6.77. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{x} e^{-n^2/x}$ не является равномерно сходящимся на множестве $E = (0, +\infty)$.

Решение

Пусть $x_n = n^2$, тогда $u_n(x_n) = e^{-1}$, т. е. выполняется условие неравномерной сходимости.

6.78. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2x^2} \tan\sqrt{\frac{x}{n}}$ не является равномерно сходящимся на множестве $E = (0,1)$.

Решение

Возьмём $x_n = \frac{1}{n}$ и воспользуемся тем, что $\tan x > x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Тогда

$$u_n(x_n) = \frac{n}{2} \tan\frac{1}{n} > \frac{1}{2}$$

при всех $n \in \mathrm{N}$, т. е. выполняется условие неравномерной сходимости рядов.

Для доказательства сходимости функциональных рядов удобно применять признаки сходимости, которые являются достаточными условиями.

Признаки равномерной сходимости функциональных рядов

1. Признак Вейерштрасса. Если для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ можно указать такой сходящийся числовой ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, что для $\forall x \in E$ и для $\forall n \ge n_0$ выполнено $|u_n(x)| \le a_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на множестве E.

6.79. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n\sqrt[3]{n+1}}\right)$ сходится равномерно на множестве $E=[0,3]$.

Решение

Так как при $t \ge 0$ справедливо неравенство

$$\ln(1+t) \le t \text{, то } |u_n(x)| \le \frac{x}{n\sqrt[3]{n+1}} \le \frac{3}{n^{\frac{3}{2}}}$$

при всех $x \in [0,3]$ и из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^{\frac{3}{2}}}$ по признаку Вейерштрасса следует равномерная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве $[0,3]$.

6.80. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{nx}\cos nx}{4+\ln^2(n+1)x}$ сходится равномерно на множестве $E=[1,+\infty)$.

Решение

Так как $|\sin t| \le |t|$ и $|\cos t| \le 1$ для всех $t \in \mathbb{R}$, то при $x \ge 1$

$$|u_n(x)| \le \frac{1}{nx\ln^2(n+1)} \le \frac{1}{n\ln^2(n+1)} \le \frac{1}{n\ln^2 n}.$$

Из сходимости по интегральному признаку ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$$

следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве $E=[1,+\infty)$.

6.81. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^{2n}$.

Решение

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^{2n} = \frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2nx^{2n-1} = \frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n (x^{2n})' =$$

$$= \frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}((-x^2)^n)' = \frac{x}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}((-x^2)^n\right)' = \frac{x}{2}\left(\frac{-x^2}{1+x^2}\right)' = -\frac{x^2}{(1+x^2)^2} .$$

Ответ: $-x^2(1+x^2)^{-2}$.

2. Признак Дирихле. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x)b_k(x)$ сходится равномерно на множестве E, если выполнено:

1) последовательность $\{B_n(x)\}$, где $B_n(x)=\sum_{k=1}^{n}b_k(x)$, равномерно ограничена на множестве E;

2) последовательность $\{a_n(x)\}$ монотонна на множестве E и равномерно стремится к нулю, т.е. $a_n(x)\underset{x\in E}{\rightrightarrows}0$.

6.82. Доказать, что при $\alpha>0$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^\alpha}$$

сходится равномерно на множестве $E=[\delta,2\pi-\delta]$, где $0<\delta<2\pi-\delta$.

Решение

Если $\alpha>1$, то по признаку Вейерштрасса ряд сходится абсолютно и равномерно на $\mathbb{R}$, так как $|\sin x|\le 1$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, где $\alpha>1$, сходится. Пусть $0<\alpha\le 1$, тогда последовательность $\{a_n\}$, где $a_n=\frac{1}{n^\alpha}$, удовлетворяет признаку Дирихле. Полагая

$$B_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\sin kx$$

и используя неравенство

$$\left|B_n(x)\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|},$$

справедливое при $x \ne \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, получаем

$$\left|B_n(x)\right| \le \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

для всех $x \in \mathrm{E}$.

По признаку Дирихле данный ряд сходится равномерно на множестве E.

На множестве $[0, 2\pi]$ исходный ряд сходится неравномерно.

3. **Признак Абеля.** Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ сходится равномерно на множестве E, если выполнено:

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ сходится равномерно на множестве E;

2) последовательность $\{a_n(x)\}$ монотонна на множестве E и равномерно ограничена.

Степенные ряды

6.83. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)$, если:

а) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2 - x - 6}$.

Решение

а) Из равенства $(1+x)^{\alpha} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k$ следует, что

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{-\frac{1}{2}}^{n} x^{2n}, \text{ где}$$

$$C_{-\frac{1}{2}}^{n} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!} = \frac{(-1)^n 1\cdot 3 \ldots (2n-1)}{2^n n!} = \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}x^{2n} \quad \text{при } |x|<1.$$

б) Так как

$$f(x)=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-3}=\frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)}-\frac{1}{3\left(1-\frac{x}{3}\right)},$$

то, применяя формулы

$$\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad \text{и} \quad \frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,$$

получаем разложение в ряд

$$\frac{2x-1}{x^2-x-6}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n,\ |x|<2.$$

6.84. Разложить в ряд Маклорена функции $\operatorname{arctg}x$, $\arcsin x$, $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ и найти радиусы сходимости R рядов.

Решение

а) Почленно интегрируя ряд

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},$$

получаем

$$\operatorname{arctg}x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ R=1.$$

б) Заменяя в формуле

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}x^{2n},\ R=1$$

x^2 на $-x^2$, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^{2n},\ R=1.$$

Откуда следует, что

$$\arcsin x=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!(2n+1)}x^{2n+1},\ R=1.$$

в) Почленно интегрируя ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^{2n},\ R=1,$$

получаем

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!(2n+1)}x^{2n+1},\ R=1.$$

6.85. Доказать, что существует $c>0$, такое, что для любого $x\in[1,\infty)$ следует[5]

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{\left(n^2+x\right)^2}-\frac{1}{2}\right|\le\frac{c}{x}.$$

Решение

Положим $f(t)=\dfrac{t}{\left(1+t^2\right)^2}$, $h=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Далее положим $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{\left(n^2+x\right)^2}=h\sum_{n=1}^{\infty}f(nh)\xrightarrow[h\to 0]{}\int_0^{\infty}f(t)dt=\frac{1}{2}$.

Сходимость ряда $h\displaystyle\sum_{n=1} f(nh)$ следует из сходимости интеграла $\displaystyle\int_0^{\infty}f(t)dt$.

При $x\to\infty$ следует $\left(h\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty}f(nh)\ge\int_{nN}^{\infty}f(t)dt\ge h\sum_{n=N+1}^{\infty}f(nh)\right)$.

Имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{\left(n^2+x\right)^2}-\frac{1}{2}=\left|\left(\sum_{n=1}^{\infty}hf(nh)-\int_{nh-\frac{h}{2}}^{nh+\frac{h}{2}}f(t)dt\right)-\int_0^{\frac{h}{2}}f(t)dt\right|\le$$

[5] Задача предлагалась на IMC1998

$$\le \sum_{n=1}^{\infty}\left| hf(nh) - \int_{nh-\frac{h}{2}}^{nh+\frac{h}{2}} f(t)dt \right| + \int_{0}^{\frac{h}{2}} f(t)dt .$$

Интегрируя дважды по частям, получаем:

$$2bg(a) - \int_{a-b}^{a+b} g(t)dt = -\frac{1}{2}\int_{0}^{b}(b-t)^2\left(g^{n}(a+t)+g^{n}(a-t)\right)dt$$

для любого $g \in C^2[a-b, a+b]$.

Так как $f(0)=0$, $f \in C^2\left[0,\frac{h}{2}\right]$, получим $\int_{0}^{\frac{h}{2}} f(t)dt = O\left(h^2\right)$.

Тогда:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{\left(n^2+x\right)^2}-\frac{1}{2}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} h^2 \int_{nh-\frac{h}{2}}^{nh+\frac{h}{2}} |f''(t)|dt + O\left(h^2\right) = h^2\int_{\frac{h}{2}}^{\infty}|f''(t)|dt + O\left(h^2\right) = O\left(x^{-1}\right).$$

6.86. Найти сумму тригонометрических рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$, б) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2-1}$.

Решение

а) Рассмотрим этот ряд как мнимую часть степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} = \ln\left(\frac{1}{1-z}\right);\quad z = e^{ix};\quad 0<|x|<\pi .$$

Под $\ln z$ понимаем ту его ветвь, для которой $\ln 1 = 0$. Тогда:

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = I\ln\left(\frac{1}{1-z}\right) = arctg\,\frac{1}{tg\,\frac{x}{2}} = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\left(tg\,\frac{x}{2}\right) - arctg\left(tg\,\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2}, \text{если} & 0 < x < \pi \\ \dfrac{-\pi - x}{2}, \text{если} & -\pi < x < 0 \end{cases}.$$

Так как функция $s(x)$ периодическая с периодом, равным 2π и $s(k\pi)=0$, $k \in z$, то

$$s(x)=\begin{cases}\dfrac{(2k+1)\pi-x}{2}, \textit{если} \quad 2k\pi<x<2(k+1)\pi\\ 0, \textit{если} \quad x=2\pi k\end{cases}.$$

Ответ: $\begin{cases}\dfrac{(2k+1)\pi-x}{2}, \textit{если} \quad 2k\pi<x<2(k+1)\pi,\\ 0, \textit{если} \quad x=2\pi k.\end{cases}$

б) Рассмотрим этот ряд как действительную часть ряда:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n^2-1}; \ z=e^{ix}, \ -\pi<x\le\pi.$$

Тогда можно записать:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2-1}=\operatorname{Re}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n^2-1}.$$

При условии, что $z\ne-1$, последний ряд представим в виде суммы двух сходящихся рядов:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-z)^{n+1}}{n}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-z)^{n-1}}{n}=\frac{1}{2}\left(z\ln(1+z)+1-\frac{\ln(1+z)}{z}\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2-1}=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(z\ln(1+z)+1-\frac{z}{2}-\frac{\ln(1+z)}{z}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\cos x-\sin x\right),$$

$$e^{-ix}\ne-1.$$

Снимем ограничение $e^{-ix}\ne-1$. Тогда $\cos nx=(-1)^n$. При этом получим числовой ряд: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}=\frac{3}{4}$.

И окончательно получим: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2-1}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\cos x-x\sin x\right)$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2}\cos x-x\sin x\right)$.

6.87. Найти сумму ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

Решение

Область сходимости данного степенного ряда – отрезок $[-1;1]$. На этом отрезке члены степенного ряда мажорируются членами сходящегося числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$. По признаку Вейерштрасса степенной ряд сходится равномерно на $[-1;1]$, следовательно, его сумма [обозначим ее через $f(x)$] непрерывна на $[-1;1]$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ является разностью двух рядов $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$. Используя стандартное разложение логарифма: $\ln(1+t)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}$, для $t\in(-1;1]$, получаем

при $x\in[-1;1)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(-x)^n}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n}=-\ln(1+(-x))=-\ln(1-x);$$

при $x\in[-1;1)$, $x\neq 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\left\|m=n+1\right\|=-\frac{1}{x}\sum_{m=2}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{(-x)^m}{m}=-\frac{1}{x}(\ln(1-x)-x).$$

Следовательно, при $x\in[-1;1)$, $x\neq 0$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\frac{1}{x}(\ln(1-x)-x)-\ln(1-x)=\frac{(1-x)\ln(1-x)-x}{x}.$$

По непрерывности $f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=-1$. Очевидно, что $f(0)=0$.

Ответ: сумма ряда равна $((1-x)\ln(1-x)-x)/x$ при $x\in[-1;0)\cup(0,1)$, равна -1 при $x=1$, равна 0 при $x=0$.

6.88. Найти сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n^2+n}x^n$.

Решение

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n^2+n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right)x^n=$$

$$=-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n+1}=-\frac{1}{x}\left(\ln(1+x)-x\right)+\ln(1+x)=$$

$$=-\frac{\ln(1+x)}{x}+1+\ln(1+x)\ \text{ при } -1<x\le 1.$$

Ответ: $-\dfrac{\ln(1+x)}{x}+1+\ln(1+x)$ при $-1<x\le 1$.

6.89. Найти $s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{4n}}{(4n)!}$.

Решение

Заметим, что $s^{(4)}(x)-s(x)=0$. Решим данное дифференциальное уравнение при дополнительных условиях:
$s(0)=1$, $s'(0)=0$, $s''(0)=0$, $s'''(0)=0$.

Составим характеристическое уравнение: $\lambda^4-1=0$.
$(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda^2+1)=0$; $\lambda_1=1$; $\lambda_2=-1$; $\lambda_{3;4}=\pm i$.

Тогда: $y_1=e^x$, $y_2=e^{-x}$, $y_3=\cos x$, $y_4=\sin x$.

Получим: $s(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x$, где

c_1, c_2, c_3, c_4 - произвольные постоянные, которые находим из данных условий:

$$s'(x)=c_1e^x-c_2e^{-x}-c_3\sin x+c_4\cos x,$$
$$s''(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}-c_3\cos x-c_4\sin x,$$
$$s'''(x)=c_1e^x-c_2e^{-x}+c_3\sin x-c_4\cos x.$$

Тогда:

$$s'(0)=c_1-c_2+c_4=0,$$
$$s''(0)=c_1+c_2-c_3=0,$$
$$s'''(0)=c_1-c_2-c_4=0.$$

Отсюда следует, что $c_1=\dfrac{1}{4}$, $c_2=\dfrac{1}{4}$, $c_3=\dfrac{1}{2}$, $c_4=0$. Таким образом, получаем: $s(x)=\dfrac{1}{4}e^x+\dfrac{1}{4}e^{-x}+\dfrac{1}{2}\cos x$.

Ответ: $s(x)=\dfrac{1}{4}e^x+\dfrac{1}{4}e^{-x}+\dfrac{1}{2}\cos x$.

6.90. Сумма функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{1-x^n}$ разложена в степенной ряд по степеням x. Найти коэффициент перед x^{2010} суммарного степенного ряда.

Решение

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}=\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\ldots+\frac{x^n}{1-x^n}+\ldots=$$

$$=x\sum_{k=1}^{\infty}x^k+x^2\sum_{k=1}^{\infty}x^{2k}+\ldots+x^n\sum_{k=1}^{\infty}x^{nk}+\ldots=$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}x^{k+1}+\sum_{k=1}^{\infty}x^{2(k+1)}+\sum_{k=1}^{\infty}x^{n(k+1)}+\ldots\ .$$

Коэффициент перед x^{2010} равен количеству слагаемых, степень которых равна 2010, то есть $n(k+1)=2010$. Так как n и $k+1$ - натуральные числа, то они являются множителями, составляющими число 2010.

$$2010=1\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 67\,.$$

Число состоит из 5 множителей (или из 4 множителей, отличных от 1). Необходимо посчитать, сколькими способами составим из них 2 множителя, дающих 2010:

1) количество комбинаций, в которых n - простой множитель, а $k+1$- составной, то есть $C_5^1=5$, где $n=1$; $k+1=2010$ и $C_4^1=4$, где n- простой множитель, отличный от 1, а $k+1$ - составной;

2) количество комбинаций из полученных простых чисел, содержащих первый множитель n, состоящий двух простых чисел, и второй $(k+1)$ - из двух: $C_2^4=\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$;

3) количество комбинаций, полученных из простых чисел, содержащих первый множитель n, состоящий из трёх простых чисел, и второй $(k+1)$ - из одного $C_3^4=\frac{4!}{3!\cdot 1!}=4$.

4) количество комбинаций, где $n=2010$ и $k+1=1$. $C_4^4=1$. В результате получим: $a_{2010}=5+6+4+1=16$.

Ответ: 16.

6.91. Решить уравнение: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}=e^{x^2}(5x+4)$.

Решение

Представим левую часть уравнения в виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n}{n!}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(x^2\right)^n=$$

$$=2x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left(x^2\right)^{n-1}+e^{x^2}=2x^2e^{x^2}+e^{x^2}=e^{x^2}\left(2x^2+1\right).$$

Приравняем полученное выражение к правой части исходного уравнения:

$$e^{x^2}\left(2x^2+1\right)=e^{x^2}\left(5x+4\right).$$

Следовательно, $2x^2+1=5x+4$. Решая полученное квадратное уравнение, получаем: $x_1=3$; $x_2=-\frac{1}{2}$. Оба корня подходят, так как рассматриваемый степенной ряд сходится при всех $x\in R$.

Ответ: $-\frac{1}{2}$; 2.

6.92. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\ln^n x}$.

Решение

Обозначим $\ln x=t$, тогда $x=e^t$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+t^n}$. Рассмотрим области различных значений t:

1) если $t>1$ $(x>e)$, то $\frac{1}{1+t^n}<\frac{1}{t^n}$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{t^n}$ сходится, то по признаку сравнения сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+t^n}$;

2) если $-1<t<1$, то $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+t^n}=1$ - не выполняется необходимый признак сходимости. Ряд расходится.

Если $t=1$ или $t=-1$, ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости: в первом случае каждый член ряда равен $\frac{1}{2}$, а во втором $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+t^n}$ не существует;

3) рассмотрим $-\infty<t<-1$ $\left(0<x<\frac{1}{e}\right)$.

Представим $\dfrac{1}{\left|1+t^n\right|}=\dfrac{1}{\left|t\right|^n}\dfrac{1}{\left|1+\dfrac{1}{t^n}\right|}$. Очевидно, что для всякого $\left|t\right|>1$ найдётся такое n_0, что для $n>n_0$ имеет место неравенство $\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\left|t\right|^n}}<2$. Следовательно, $\dfrac{1}{2\left|t\right|^n}<\dfrac{1}{\left|1+t^n\right|}<2\dfrac{1}{\left|t\right|^n}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\left|t\right|^n}$ при $\left|t\right|>1$ сходится. Тогда по признаку сравнения сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+t^n}$.

Ответ: ряд сходится при $x\in\left(0;\dfrac{1}{e}\right)\cup(e;+\infty)$.

6.93. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^x}\right)$.

Решение

Перепишем ряд, выделив первый член:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^x}\right)=\ln(1-1)+\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^x}\right).$$

Получили, что первый член ряда $\ln 0$ не определён ни при каком $x\in R$. Второй член ряда представляет собой функциональный ряд. Отбросим первый член ряда и рассмотрим оставшуюся часть.

Пусть $\alpha_n=\dfrac{(-1)^n}{n^x}$, $a_n=\ln\left(1+\alpha_n\right)$. При $x<0$ аргумент логарифма $\left(1+\alpha_n\right)$ принимает значения разных знаков, но его модуль возрастает с ростом n, поэтому возрастает модуль члена ряда $\left|a_n\right|$. В этом случае ряд расходится, так как нарушено необходимое условие сходимости ряда. При $x=0$, $\alpha_n=1$ либо $\alpha_n=-1$, поэтому ряд состоит из двух членов: $a_n=\ln 2$ и

$a_n = \ln 0$. Так как ряд содержит бесконечное число неопределённых выражений, то он не определён при $x = 0$.
Рассмотрим значения $x > 0$. Из теоремы функциональных рядов известно, что если для двух рядов $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} q_n(x)$ выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n(x)}{q_n(x)} = 1,$$

то ряды сходятся или расходятся одновременно и их области сходимости совпадают.
Имеем $\ln(1+\alpha_n) \sim \alpha_n$ при $n \to \infty$, поэтому рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$.

При $x > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ сходится. Следовательно, данный ряд сходится абсолютно при $x > 1$.
При $0 < x \le 1$ ряд сходится условно, так как выполнены условия признака Лейбница (ряд знакопеременный, последовательность $\frac{1}{n^x}$ монотонно убывает до нуля).

Ответ: исходный ряд не определён, так как суммирование начинается с $n = 1$; ряд, начинающийся с $n = 2$, сходится абсолютно при $x > 1$; сходится условно при $0 < x \le 1$; при $x = 0$ не определён; при $x < 1$ расходится.

6.94. Найти число $f'(1)$, если $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{n-1}(2n-1)!}$.

Решение

$$f(x) = \sqrt{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{2n-1} = \sqrt{x}\, \mathrm{sh}\, \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

При $x > 0$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \mathrm{sh}\, \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2x} \mathrm{ch}\, \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Поэтому $f'(1) = \frac{1}{2} \left(\frac{e - e^{-1}}{2} - \frac{e + e^{-1}}{2} \right) = -\frac{1}{2e}$.

Ответ: $-1/(2e)$.

6.95. Пусть $f:[0;\infty)\to[0;\infty)$ – строго возрастающая непрерывная функция такая, что $f(0)=0$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}$ сходится, f^{-1} – функция, обратная к f. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ сходится.

Решение

Достаточно доказать сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sigma_i$, где $\sigma_i=\sum\limits_{k=2^i+1}^{2^{i+1}}\frac{f^{-1}(k)}{k^2}$.

Так как

$$\sigma_i=\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}}\frac{f^{-1}(k)}{k^2}<f^{-1}\left(2^{i+1}\right)\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}}\frac{1}{k(k-1)}=f^{-1}\left(2^{i+1}\right)\left(\frac{1}{2^i}-\frac{1}{2^{i+1}}\right)=\frac{f^{-1}\left(2^{i+1}\right)}{2^{i+1}},$$

то достаточно доказать сходимость ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{f^{-1}\left(2^{i+1}\right)}{2^{i+1}}.$$

Пусть $g(x)=\frac{1}{f(x)}$. Тогда $g^{-1}(t)=f^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)$.Так как по условию ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}g(n)$ сходится, то сходится несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty}g(x)\,dx$, следовательно, сходится $\int\limits_0^1 g^{-1}(x)\,dx$ (симметрия относительно прямой $x=y$). Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(g^{-1}\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)-g^{-1}\left(\frac{1}{2^k}\right)\right)\frac{1}{2^{k+1}}$ дает значение площади ступенчатой фигуры, целиком лежащей в подграфике функции $g^{-1}:(0;1]\to R$, и, следовательно, сходится. «Перегруппировка» членов приводит к сходящемуся ряду: $\sum\limits_k\frac{1}{2^{k+1}}g^{-1}\left(\frac{1}{2^k}\right)=\sum\limits_k\frac{f^{-1}\left(2^k\right)}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}\sum\limits_k\frac{f^{-1}\left(2^k\right)}{2^k}$.

Следовательно, исходный ряд сходится.

6.96. Найти сумму ряда $1+\frac{x^2}{2\cdot 4}+\frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}+\ldots$.

Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{(2n)!}=ch\frac{x}{2}$.

6.97. Найти сумму ряда $y(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

Решение

Функция удовлетворяет уравнению $y^{m}=y+1$ и условиям $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$.

Ответ: $y=\left(e^{x}+2e^{-x/2}\cos\left(\sqrt{3}x/2\right)\right)/3$.

6.98. Показать, что для любого фиксированного $m\geq 2$ ряд

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m-1}-\frac{x}{m}+\frac{1}{m+1}+\ldots+\frac{1}{2m-1}-\frac{x}{2m}+\frac{1}{2m+1}+\ldots+\frac{1}{3m-1}-\frac{x}{3m}+\ldots$$

сходится только для одного значения x, и найти сумму ряда для этого x.

Решение

Пусть $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)m+1}+\ldots+\frac{1}{km-1}-\frac{x}{km}\right)$. Если данный ряд сходится для каких-то x и y, то последовательность $S_n(x)-S_n(y)=\frac{y-x}{m}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ также сходится. Но так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ расходится, это возможно тогда и только тогда, когда $x=y$. Следовательно, ряд сходится не больше чем для одного x. Далее, как известно, последовательность $A_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{nm}-\ln(nm)$ сходится к эйлеровой константе γ. Таким образом,

$$S_n(m-1)=A_n+\ln(nm)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{km}=A_n+\ln m+\left(\ln n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$$

и $S_n(m-1) \to \gamma + \ln m - \gamma = \ln m$ при $n \to \infty$. Следовательно, при $x = m-1$ ряд сходится к $\ln m$.

6.99. Найти сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} tg \frac{x}{2^k}$.

Решение

Пусть $S_N(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} tg \frac{x}{2^k}$.

$$\int_0^x S_N(x)\,dx = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} \int_0^x tg \frac{x}{2^k} dx = -\sum_{n=1}^{N} \ln\cos\frac{x}{2^n} = -\ln\prod_{n=1}^{N}\cos\frac{x}{2^n} =$$

$$= -\ln \frac{\sin\frac{x}{2^N}\cos\frac{x}{2^N}\cos\frac{x}{2^{N-1}}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2^N}} = -\ln\frac{\sin x}{2^N\sin\frac{x}{2^n}}.$$

Следовательно,

$$S_N(x) = \left(-\ln\frac{\sin x}{2^N\sin\frac{x}{2^N}}\right)' = -ctg(x) + \frac{1}{2^N} ctg\frac{x}{2^N} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{x} - ctg(x).$$

Ответ: $S(x) = \frac{1}{x} - ctg(x)$.

6.100. Найти область сходимости и просуммировать ряд:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-1} e^{-nx}.$$

Указание

Использовать тождество $\frac{n}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}\right)$ и стандартное разложение для $\ln(1+t)$.

Ответ: $-\left(e^x + e^{-x}\right)\ln\left(1-e^{-x}\right)/2 - 1/2 - e^{-x}/4$, сходимость при $x > 0$.

6.101. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{e^{a_n x}+1}$ при $x > 0$, если $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n$ при $n = 1, 2, \ldots$.

Решение

Рассмотрим частную сумму

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{e^{a_nx+1}}=\sum_{n=1}^{N}\frac{a_ne^{-a_nx}}{e^{-a_nx}+1}=\sum_{n=1}^{N}\left(-\ln\left(1+e^{-a_nx}\right)\right)'=$$

$$=-\left(\sum_{n=1}^{N}\ln\left(1+e^{-a_nx}\right)\right)'=-\left(\ln\prod_{n=1}^{N}\left(1+e^{-a_nx}\right)\right)'. \qquad (1)$$

Преобразуем произведение:

$$\prod_{n=1}^{N}\left(1+e^{-a_nx}\right)==\frac{1-e^{-a_1x}}{1-e^{-a_1x}}\prod_{n=1}^{N}\left(1+e^{-a_nx}\right)=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-a_1x}}\left(1-e^{-a_1x}\right)\left(1+e^{-a_1x}\right)\left(1+e^{-a_2x}\right)\ldots\left(1+e^{-a_nx}\right)=\frac{1}{1-e^{-a_1x}}\left(1-e^{-2a_nx}\right).$$

Проинтегрируем равенство (1):

$$-\int_{x}^{+\infty}S_N(x)dx=-\left(\ln\frac{\left(1-e^{-2a_nx}\right)}{1-e^{-a_1x}}\right).$$

При $N\to\infty,\ \ x>0$: $-\int\limits_{x}^{+\infty}S_N(x)\,dx=-\left(\ln\frac{1}{1-e^{-a_1x}}\right)=\ln\left(1-e^{-a_1x}\right)$.

После дифференцирования получаем:

$$S(x)=\frac{-(-a_1)e^{-a_1x}}{1-e^{-a_1x}}=\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}=\frac{1}{e^x-1}.$$

Ответ: $S(x)=\dfrac{1}{e^x-1}$.

6.102. При каких значениях $x\in\mathbb{R}$ сходится ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{nx^2+1}{(2n^2-n-1)\ln(x^2+n)}$?

Решение

Члены ряда определены и положительны при всех $x\in\mathbb{R}$. Если $x\neq 0$, то при $n\to\infty$

$$\frac{nx^2+1}{(2n^2-n+1)\ln(x^2+n)}\sim\frac{x^2}{2n\ln(x^2+n)}\sim\frac{x^2}{2(x^2+n)\ln(x^2+n)}.$$

Так как интеграл $\int\limits_{2}^{+\infty}\dfrac{dn}{(x^2+n)\ln(x^2+n)}=\ln\ln(x^2+n)\Big|_{2}^{+\infty}=\infty$, то ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(x^2+n)\ln(x^2+n)}$ расходится. По предельному признаку сравнения расходится и заданный ряд. Если $x=0$, то *n*-й член ряда имеет вид $\dfrac{1}{(2n^2-n+1)\ln n}$. Так как $\dfrac{1}{(2n^2-n+1)\ln n}\sim\dfrac{1}{2n^2\ln n}$, $\dfrac{1}{2n^2\ln n}<\dfrac{1}{2n^2}$ при $n\geq 3$, а $\int\limits_2^\infty\dfrac{dn}{n^2}$ – сходится, то ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(2n^2-n+1)\ln n}$ сходится.

Итак, заданный ряд сходится только при $x=0$.

Ответ: ряд сходится при $x=0$.

6.103. Пусть $\alpha\in(0,1)$, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{x_k}{k^\alpha}$ сходится и $x_k\geq x_{k+1}\geq 0$ для всех k. Докажите, что ряд

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k^{\frac{1}{1-\alpha}}$ также сходится.

Решение

Так как $\{x_k\}$ монотонно убывает к нулю, то и последовательность $\alpha^k=\dfrac{x_k}{k^\alpha}$ монотонно убывает к нулю. Поскольку

$$\sum_{m=k+1}^{2k}\alpha_m\geq\alpha_{2k}k \text{ и ряд } \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$$

сходится, то в силу критерия Коши сходимости ряда получаем, что $2k\alpha_{2k}\to 0$.

$$\frac{x_k}{k^\alpha}=\frac{\varepsilon_k}{k}\Rightarrow x_k=\frac{\varepsilon_k}{k^{1-\alpha}}\Rightarrow x_k^{\frac{1}{1-\alpha}}=\frac{\varepsilon_k^{\frac{1}{1-\alpha}}}{k}\leq\frac{\varepsilon_k}{k}.$$

Последнее неравенство верно при достаточно больших k. Следовательно, ряд $\sum x_k^{\frac{1}{1-\alpha}}$ сходится по признаку сравнения.

6.104. Доказать, что $\forall x\in\mathbb{R}$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n!}>0$.

Решение. Так как $\forall x\in\mathbb{R}$ $-\dfrac{\pi}{2}<-1\leq\sin x\leq 1<\dfrac{\pi}{2}$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^{ix})^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^{-ix})^n}{n!}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{e^{ix}}+e^{e^{-ix}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{\cos x+i\sin x}+e^{\cos x-i\sin x}\right)=e^{\cos x}\cos(\sin x)>0\ .$$

5. Другие задачи с использованием рядов

6.105. Функция $f(x)$ 2π-периодична, нечётная; $f(x)=0$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ и удовлетворяет условию $f(x)+f(x+\pi)=\sin 2x$. Разложить данную функцию в ряд Фурье.

Решение

Из нечётности функции и 2π-периодичности следует, что $f(x)=0$ на

$$\left[2\pi n+\frac{\pi}{2};2\pi n+\frac{3\pi}{2}\right].$$

Из условия $f(x)=\sin 2x-f(x+\pi)$ следует $f(x)=\sin 2x$ при $|x|\le\frac{\pi}{2}$. Вычислим коэффициенты Фурье: $a_n=0$; $b_2=\frac{1}{2}$ при $n\ne 2$.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin x dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin 2x\sin x dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos(n-2)x-\cos(n+2)x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{(n-2)\pi}{2}}{n-2}-\frac{\sin\frac{(n+2)\pi}{2}}{n+2}\right)=\frac{1}{\pi}\frac{-4\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2-4}\ .$$

6.106. Найти геометрический образ области сходимости ряда на комплексной плоскости:

$$1+\left(z^2+1\right)+\left(z^2+1\right)^2+\left(z^2+1\right)^3+\ldots+\left(z^2+1\right)^n+\ldots .$$

Решение

Пусть $z = x + iy$. Ряд – геометрическая прогрессия со знаменателем z^2+1 сходится, если $\left|z^2+1\right|<1$.

$$\left|z^2+1\right|<1 \Leftrightarrow \quad \left|x^2-y^2+2ixy+1\right|=\sqrt{\left(x^2+y^2+1\right)+4x^2y^2}<1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2y^2\right)^2+2\left(x^2-y^2\right)<0.$$

В полярной системе координат:

$$r^4+2r^2\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right)<0 \Leftrightarrow r^2<-\cos 2\varphi.$$

Ответ: открытое множество, ограниченное лемнискатой $r^2=-\cos 2\varphi$.

6.107. Разложить в степенной ряд по степеням x функцию:

$$\frac{1}{(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{2n-1})}.$$

Решение

$$\frac{1}{(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{2n-1})}=\frac{1-x}{1-x^{2n}}=(1-x)\left(1+x^{2n}+x^{2\cdot 2^n}+\dots+x^{k\cdot 2^n}+\dots\right)=$$

$$=1-x+x^{2^n}-x^{2^n+1}+x^{2-2^n}-x^{2\cdot 2^n+1}+\dots+x^{k\cdot 2^n}-x^{k\cdot 2^n+1}+\dots.$$

6.108. Пусть n - натурально. Доказать, что $\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{x^{k-n}}{k!}\neq 0$ при всех $x\in R$.

Решение

$f_n(x)=\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$. Тогда $f_n(0)=0;\ f_n(x)=e^x-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}$;

$f_n'(x)=f_{n-1}'(x)$. Пусть $f_n(0)=0$ (ясно, что $x_0<0$). По теореме Ролля существует $x_1\in(x_0;0)$ такая, что $f_n'(x_1)=f_{n-1}'(x_1)=0$. Продолжая, найдем $x_n\in(x_{n-1};0)$ так, что $f_0(x_n)=0$. Но $f_0(x)=e^x\neq 0$. Наша функция есть $\frac{f_n(x)}{x^n}$.

6.109. Пусть $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cos\left(4^{kx}\right)$. Доказать существование такой константы $C>0$, что для всех $x_1, x_2 \in R$ будет $|f(x_1)-f(x_2)|\le C\sqrt{|x_1-x_2|}$.

Решение

Известно, что $|\cos\alpha-\cos\beta|\le|\alpha-\beta|$. Пусть

$$N=\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{|x_2-x_1|}}+2\right)-1.$$

$$|f(x_2)-f(x_1)|\le\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2^n}|\cos\left(4^n x_2\right)-$$

$$-\cos\left(4^n x_1\right)|+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\cos\left(4^n x_2\right)--\cos\left(4^n x_1\right)|.$$

В первой сумме: $\left|\cos\left(4^n x_2\right)-\cos\left(4^n x_1\right)\right|\le 4^n\left|x_2-x_1\right|$, а во второй: $\left|\cos\left(4^n x_2\right)-\cos\left(4^n x_1\right)\right|\le 2$. Поэтому $\left|f(x_2)-f(x_1)\right|\le\left|x_2-x_1\right|$.

$\frac{2^{N+1}-2}{2-1}+4\cdot\frac{1}{2^{N+1}}\le C\sqrt{|x_{2-x_1}|}$, так как по определению

$$N: 2^{N+1}\cdot 2=\frac{1}{\sqrt{|x_2-x_1|}}.$$

6.110. Доказать иррациональность числа $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}$.

Решение

Предположим, что S – рационально, то есть $S=m/n$, где m и n – целые числа. Тогда число $S(n!)^2=m(n-1)!n!$ будет целым. Так как $(n!)^2 S=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(n!)^2}{(k!)^2}+\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(k!)^2}$, где $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(n!)^2}{(k!)^2}$ – целое, то $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(k!)^2}$ тоже должно быть целым. Но

$$0<\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(k!)^2}<\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{2i}}=\frac{1/(n+1)^2}{1-1/(n+1)^2}=\frac{1}{n(n+2)}\le\frac{1}{3}.$$

Из полученного противоречия получаем, что на самом деле S – иррационально.

6.111. Доказать, что при любых $a_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, ..., n)$ функция $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx$ имеет бесконечное множество нулей.

Решение

Так как $\forall k \in \mathbb{N}$ $\cos kx$ – периодическая функция с периодом 2π, то их линейная комбинация $f(x)$ – также периодическая функция с тем же периодом. Поэтому достаточно доказать, что $f(x)$ имеет нуль на отрезке $[0; 2\pi]$.

Рассмотрим функцию $g(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} \sin kx$. Так как 1) $g(x)$ дифференцируема на отрезке $[0; 2\pi]$ и $g'(x) = f(x)$; 2) $g(0) = g(2\pi) = 0$, то по теореме Ролля существует точка $c \in (0; 2\pi)$, такая что $g'(c) = 0$, а значит, и $f(c) = 0$.

6.112. Доказать, что для любых действительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ справедливо неравенство $\sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \frac{a_k a_m}{k+m} \geq 0$.

Решение

Рассмотрим многочлен $p(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} a_k a_m x^{k+m-1} = \dfrac{(\sum_{k=1}^{n} a_k x^k)^2}{x}$.

Ясно, что $p(x) \geq 0$ при $x \geq 0$. Поэтому $\int_0^1 p(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \frac{a_k a_m}{k+m} \geq 0$.

6.113. Доказать, что функция

$$\mathrm{T}(\mathrm{x}) = \frac{a_0}{2} + \cos x + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \cos kx \text{, где } |a_0| < 1,$$

принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Решение

Рассмотрим два интеграла:

$$\mathrm{I}_{\pm} = \int_0^{2\pi} \mathrm{T}(\mathrm{x})(1 \pm \cos x)dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} \pm \cos^2 x \right) dx = \pi(a_0 \pm 1).$$

Так как $|a_0| < 1$, то $\mathrm{I}_+ > 0$, $\mathrm{I}_- < 0$. Но если предположить, что $\mathrm{T} \geq 0$ (≤ 0), то оба интеграла будут ≥ 0 (≤ 0), так как

$1 \pm \cos x \geq 0$. Следовательно, функция $\mathrm{T}(\mathrm{x})$ принимает значения разных знаков.

6.114. Найти предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C_n^k}\right)^n .$$

Решение

Пусть $a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C_n^k}$. Тогда при достаточно больших n

$$a_n > \frac{1}{C_n^1} + \frac{1}{C_n^{n-1}} + \frac{1}{C_n^n} = 1 + \frac{2}{n},$$

$$a_n < 1 + \frac{2}{C_n^1} + \frac{2}{C_n^2} + \frac{n-5}{C_n^3} < 1 + \frac{2}{n} + \frac{1995}{n^2}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty} a_n^n = e^2$.

Ответ: e^2.

6.115. Пусть $(x_1, x_2, \ldots)$ – последовательность полосы вещественных чисел $(x_i \in \mathbb{R})$, удовлетворяющих условию $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2n-1} = 1$. Докажите, что $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{x_n}{k^2} \leq 2$.

Решение

Заменяя порядок, вычисляем сумму

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{x_n}{k^2} = \sum_{1\leq n\leq k}\frac{x_n}{k^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k}\right).$$

И, используя верхнюю оценку

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2-\frac{1}{4}} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-\frac{1}{2}} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{n-\frac{1}{2}},$$

получаем:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{x_n}{k^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right) < \sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n\frac{1}{n-\frac{1}{2}}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2n-1} = 2.$$

6.116. Пусть n - положительное целое число $(n \geq 0, n \in \mathbb{Z})$. Также пусть $a_1, a_2, ..., a_1$ и $b_1, b_2, ..., b_n$ - вещественные $(a_i, b_i \in \mathbb{R})$ такие, что $a_i + b_i > 0$ для $i = 1, 2, ..., n$. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i - b_i^2}{a_i + b_i} \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \sum\limits_{i=1}^{n} b_i - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i + b_i)}.$$

Решение

Используем тождество

$$\frac{xy - y^2}{x + y} = y - \frac{2y^2}{x + y}$$

при $x = a_i$ и $y = b_i$, где однозначно к условиям LHS и $x = \sum\limits_{I=1}^{n} a_i$ и $y = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$ к условиям RHS,

$$LHS = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i - b_i^2}{a_i + b_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(b_i - \frac{2b_i^2}{a_i + b_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} b_i - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{a_i + b_i},$$

$$RHS = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \sum\limits_{i=1}^{n} b_i - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i} = \sum_{i=1}^{n} b_i - 2\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i + b_i)}.$$

Далее утверждаем эквивалентность.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{a_i + b_i} \geq \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right)^2}{\sum\limits_{ni=1}^{n} (a_i + b_i)},$$

который эквивалентен с известным неравенством Коши – Шварца:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{y_i} \geq \frac{(x_1 + ... + x_n)^2}{y_1 + ... y_n} \quad (y_1, ..., y_n > 0)$$

при $x_i = b_i$ и $y_i = a_i + b_i$.

Библиографический список

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
2. Беркович Ф.Д., Федий В.С., Шлыков В.И. Задачи студенческих математических олимпиад с указаниями и решениями. – Ростов н/Д.: Феникс, 2008.
3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 2001.
4. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. – М.: Лань, 2009.
5. Веретенников Б.М., Мохрачева Л.П., Соболев А.Б., Ходак Г.Л. Студенческие олимпиады по математике УГТУ-УПИ. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2009.
6. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 2000.
7. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997.
8. Зорич В.А. Математический анализ.– М.: МЦНМО, 2012.
9. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа.– М.: Высшая школа, 1981.
10. Попов Ю.И. Задачи повышенной трудности в курсе высшей математики. – СПб.: СПбГУ ИТМО, 2008.
11. Задачи студенческих математических олимпиад ЯГТУ: учеб. пособие / В. Ш. Ройтенберг, Ю. К. Оленикова, Л. А. Сидорова. – 2-е изд., испр. и доп. – Ярославль : Изд-во ЯГТУ, 2015. – 151 с.
12. Садовничий В.А., Подколзин А.С. Задачи студенческих олимпиад по математике. – М.: Наука, 1978.
13. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 2000.
14. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009.
15. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
16. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1965.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Для заметок

Б у х е н с к и й Кирилл Валентинович

Д ю б у а Александр Борисович

К о н ю х о в Алексей Николаевич

К у ч е р я в ы й Сергей Иванович

М а ш н и н а Светлана Николаевна

О л е н и к о в а Юлия Константиновна

Р о й т е н б е р г Владимир Шлеймович

С а ф о ш к и н Алексей Сергеевич

Студенческие математические олимпиады. Часть 3

Редактор М.Е. Цветкова

Корректор С.В. Макушина

Подписано в печать . Формат бумаги 60×84 1/16.

Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л.5,25.

Тираж 50 экз. Заказ

Рязанский государственный радиотехнический университет.

390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТУ.