

УДК 537.533.35

А.А. Скунцев, А.А. Трубицын

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ПОИСКА УСЛОВИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ФОКУСИРОВКИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Предлагается численный метод оценки одного из важнейших параметров электронно-оптических систем - порядка пространственной фокусировки. Метод основывается на определении величины взаимной корреляции степенной функции и сформированной в ходе траекторного анализа некоторой функции начальной координаты заряженной частицы. Проведена проверка метода на системах, допускающих аналитические решения.

Ключевые слова: пространственная фокусировка, численный метод, фокусировка высших порядков, ряд Тейлора, иммерсионная линза.

Введение. Порядок пространственной (геометрической) фокусировки является одним из важнейших параметров электронно-оптических систем. Так, для электронных линз данный параметр фиксирует величину геометрических аберраций, которые определяют размеры изображения источника частиц.

Численные методы в отличие от аналитических позволяют теоретически исследовать системы, наиболее приближенные к реальным.

Описываемый численный метод поиска фокусировки высших порядков можно рассматривать как распространение методики [1,2] поиска условий угловой фокусировки на исследование проблем пространственной фокусировки.

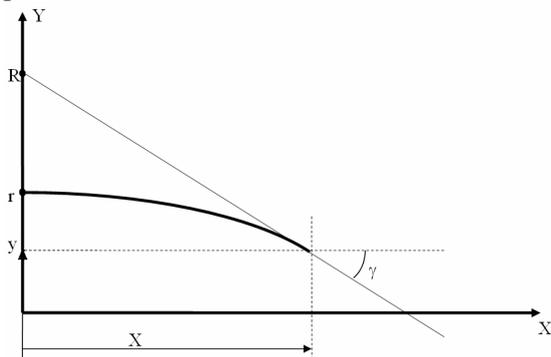


Рисунок 1 - Траектория заряженной частицы в ЭОС

Теоретические исследования. Величина ординаты y точки пересечения плоской траектории заряженной частицы с некоторой прямой OO' , расположенной на расстоянии x от источника частиц и перпендикулярной оси Ox (рисунок 1), после прохождения частицей

фокусирующего поля может быть выражена рядом Тейлора

$$y(\bar{k}, r) = y(\bar{k}, r_0) + (\partial y / \partial r)_0 \Delta r + 1/2 (\partial^2 y / \partial r^2)_0 \Delta r^2 + \dots$$

где угол r – начальная координата движения частицы, $\Delta r = (r - r_0)$, \bar{k} – вектор, параметрами которого являются расстояние x , энергия частицы и геометрические размеры и потенциалы электродов электронно-оптической системы. В дальнейших выкладках \bar{k} опускается. Условие фокусировки порядка N для фиксированного \bar{k} в соответствии с рядом Тейлора выражается равенством нулю частных производных по координате r

$$y'(r_0) = y''(r_0) = \dots = y^{(N)}(r_0) = 0,$$

для обозначения порядка которых использовано соответствующее количество штрихов.

Функция $y(r)$ в соответствии со схемой, изображенной на рисунке 1, может быть записана в следующем виде:

$$y(r) = R(r) - x t(r) \quad (1)$$

где $R(r) = y_c(r) + x_c(r) t(r)$, $t(r) = \tan(\gamma)$; $\gamma(r)$ и $x_c(r)$, $y_c(r)$ – угол наклона и координаты частицы при пересечении прямой OO' .

Условие фокусировки первого порядка $y'(r) = 0$ в соответствии с уравнением (1) приобретает вид:

$$R'(r) - x t'(r) = 0$$

или

$$x = R'(r) / t'(r), \quad y = R(r) - x t(r). \quad (2)$$

Равенство равно нулю второй производной $y''(r)$ имеет место, когда

$$R''(r) - x t''(r) = 0,$$

а условие фокусировки второго порядка с учетом выражения для x из (2) записывается в виде:

$$R''(r) t'(r) - R'(r) t''(r) = 0.$$

Далее вводится функция

$$F(r) = R''(r) t'(r) - R'(r) t''(r) \quad (3)$$

и производится поиск условий фокусировки второго порядка, заключающийся в решении уравнения

$$F(r) = 0 \quad (4)$$

относительно $r=r_0$ и определении координат точки фокуса по формулам

$$x_0 = R'(r_0)/t'(r_0), y_0 = R(r_0) - x_0 t(r_0). \quad (5)$$

При численном поиске условий фокусировки необходимые функции вычисляются на дискретном наборе входных координат $r_i, i=1, 2, \dots, L$, (достаточно $20 \div 50$ траекторий) в априорно выбранном диапазоне координат $[r_{min}, r_{max}]$ и интерполируются для $r \neq r_i$. Производные рассчитываются по формулам численного дифференцирования [3].

Из уравнений (1) и (2) следует, что условие фокусировки N -го порядка будет иметь место при

$$\delta_n(r_0) = R^{(n)}(r_0) t'(r_0) - R'(r_0) t^{(n)}(r_0) = 0, \quad (6)$$

где $n=2, 3, \dots, N$. Однако численный расчет производных высших порядков ($n > 2$) приводит к большим погрешностям, и поэтому функция $\delta_n(r)$ не может быть вычислена с требуемой точностью.

Предварительное исследование возможностей изложенного метода на реальных системах показало, что метод эффективен при поиске фокусировки второго порядка и непригоден для поиска фокусировки более высоких порядков.

В этой связи возникает задача адаптации метода к поиску условий фокусировки выше, чем второго порядка.

Из уравнения (6) следует, что в случае фокусировки N -го порядка для $2 \leq m \leq N$

$$R'(r_0)/t'(r_0) = R^{(m)}(r_0)/t^{(m)}(r_0),$$

и для $m=n-1$ условие (6) может быть переписано следующим образом:

$$\delta_n(r_0) = R^{(n)}(r_0) t^{(n-1)}(r_0) - R^{(n-1)}(r_0) t^{(n)}(r_0) = 0, \quad (7)$$

где $n=3, 4, \dots, N$.

Из выражения (3) следует выражение для производной $F'(r)$:

$$F'(r) = R'''(r) t'(r) + R''(r) t''(r) - t''(r) R''(r) - t'''(r) R'(r)$$

$$R'(r) = R'''(r) t'(r) - t'''(r) R'(r).$$

Из выражения (6) следует, что в случае фокусировки третьего порядка

$$F'(r_0) = 0.$$

Предпоследнее уравнение позволяет записать равенство

$$F''(r) = R^{(IV)}(r) t'(r) + R'''(r) t''(r) - t^{(IV)}(r) R'(r) - t'''(r) R''(r). \quad (8)$$

Из выражения (7) следует, что в случае фокусировки третьего порядка

$$F''(r_0) = R^{(IV)}(r_0) t'(r_0) - t^{(IV)}(r_0) R'(r_0),$$

а если имеет место фокусировка четвертого порядка, то (см. (6)) $F''(r_0) = 0$.

Аналогичные рассуждения позволяют показать, что условием фокусировки порядка $N+2$ являются равенства

$$F^{(n)}(r_0) = 0, n=0, 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

Разложим в ряд Тейлора функцию $F(r)$ вблизи r_0 :

$$F(r) = F(r_0) + F'(r_0)(r-r_0) + (1/2)F''(r_0)(r-r_0)^2 + \dots + (1/N!)F^{(N)}(r_0)(r-r_0)^N + \dots$$

с учетом (9) в случае фокусировки порядка $(N+2)$ имеем

$$F(r) = 1/(N+1)! F^{(N+1)}(r_0) (r-r_0)^{N+1} + 1/(N+2)! F^{(N+2)}(r_0) (r-r_0)^{N+2} + \dots \quad (10)$$

Поскольку $F(r)$, вычисляемая по формуле (3), является результатом численных расчетов, то она будет представлять собой суперпозицию истинных значений функции и некоторого шума, поэтому естественно считать указанную функцию случайной функцией неслучайного аргумента r .

Обозначим функцию, определяемую в соответствии с формулой (10), как $S^*(r)$, т.е.

$$S^*(r) = 1/(N+1)! F^{(N+1)}(r_0) (r-r_0)^{N+1} + 1/(N+2)! F^{(N+2)}(r_0) (r-r_0)^{N+2} + \dots \approx 1/(N+1)! F^{(N+1)}(r_0) (r-r_0)^{N+1}.$$

Будем считать $S^*(r)$ также случайной функцией с пренебрежительно малым уровнем шума, а $1/(N+1)! F^{(N+1)}(r_0)$ - неслучайным множителем.

Достаточно очевидным является то, что в случае фокусировки порядка $N+2$ функции $F(r)$ и $S^*(r)$ являются коррелированными.

Для оценки степени зависимости сечений двух случайных функций пользуются характеристикой - нормированной взаимной корреляционной функцией [4]. Поскольку при умножении случайной функции на неслучайные множители нормированная взаимная корреляционная функция не изменяется, то для оценки корреляционной зависимости функций $F(r)$ и $S^*(r)$ достаточно исследовать корреляцию между $F(r)$ и $S(r) = (r-r_0)^{N+1}$.

При дискретном изменении аргумента $r=r_1, r_2, \dots, r_L$ и для случая нулевого сдвига между

функциями $F_i = F(r_i)$ и $S_i = S(r_i) = (r_i - r_0)^{N+1}$, $i=1, 2, \dots, L$, нормированная взаимная корреляционная функция определяется формулой

$$\rho_0(N) = R_{FS} / (K_F \cdot K_S)^{1/2}, \quad (11)$$

где $R_{FS} = 1/L \sum_{i=1}^L (F_i - \bar{F})(S_i - \bar{S})$,

$$K_F = 1/L \sum_{i=1}^L (F_i - \bar{F})^2, \quad K_S = 1/L \sum_{i=1}^L (S_i - \bar{S})^2,$$

$$\bar{F} = 1/L \sum_{i=1}^L F_i, \quad \bar{S} = 1/L \sum_{i=1}^L S_i,$$

и чем выше степень корреляции функций F_i и S_i , тем ближе к 1 функция ρ_0 . Здесь мы рассматриваем ρ_0 как функцию параметра N , определяющего степень соответствующего полинома.

Предлагаемая методика поиска фокусировки высших порядков заключается в следующем.

В соответствии с уравнением (4) определяется координата r_0 , вблизи которой осуществляется фокусировка второго порядка. Затем по формуле (11) оценивается корреляция функции $F(r)$ (см. (3)) со степенной функцией $S(r) = (r - r_0)^{m+1}$ при последовательном изменении значения $m=0, 1, \dots, M$, где M - верхняя граница поиска, выбираемая в соответствии с конкретно поставленной практической задачей. Далее определяется величина N ($0 \leq N \leq M$), при которой $\rho_0(N) = \max\{\rho_0(0), \rho_0(1), \dots, \rho_0(M)\}$. Близость $\rho_0(N)$ к 1 будет свидетельствовать о взаимной корреляции $F(r)$ и $S(r) = (r - r_0)^{N+1}$, т.е. о наличии фокусировки порядка $N+2$. На практике достаточно ограничиться $M=10 \div 20$.

Во избежание операций с большими числами функцию $S(r) = (r - r_0)^{N+1}$ следует нормировать на множитель $(r_{max} - r_{min})^{N+1}$.

Из формулы (10) следует, что при высоких порядках фокусировки функция $F(r)$ будет близка к нулю в достаточно широком диапазоне углов r . Поэтому вследствие шума в $F(r)$ при решении уравнения $F(r) = 0$ могут наблюдаться ложные корни. В таких случаях с целью уточнения r_0 необходимо оценивать максимум взаимной корреляционной функции $\rho_0(r_0, N)$ по двум переменным – центральной координате фокусировки и степени полинома.

Экспериментальные исследования. Ниже представляется сравнительный анализ фокусирующих параметров стандартных линзовых систем, полученных с помощью предлагаемого подхода и классическими аналитическими методами.

На рисунке 2 (кривая 1) представлена зависимость оптической силы ($\times 10$) одиночной

линзы (рисунок 3), определенная в параксиальном приближении [5].

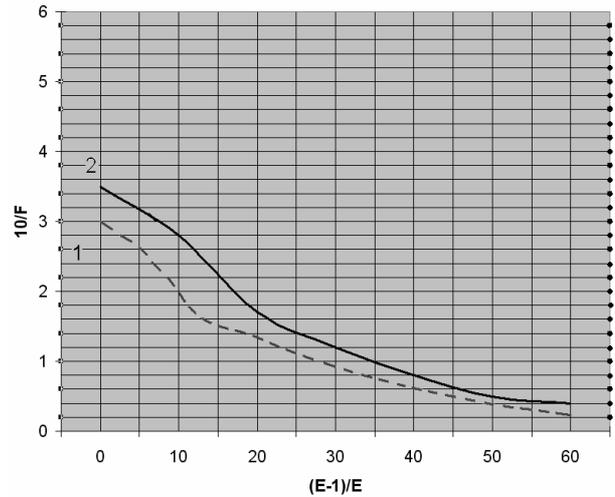


Рисунок 2 - Оптическая сила ($\times 10$) одиночной линзы. E – начальная энергия положительно заряженных частиц

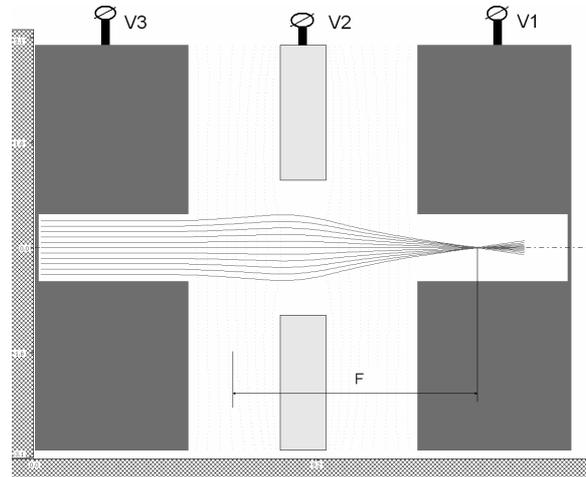


Рисунок 3 - Результаты траекторного анализа одиночной линзы. Потенциалы $V_1=V_3=0, V_2=1$. Фокусное расстояние F определяется как расстояние между главной оптической осью и точкой фокуса

Кривая 2 (рисунок 2) демонстрирует результаты использования предложенной численной методики. Численное моделирование показало, что, во-первых, одиночная линза обеспечивает второй порядок геометрической фокусировки и, во-вторых, параксиальное приближение дает заниженное значение фокусного расстояния (завышенное значение оптической силы).

На рисунке 4 (кривая 1) представлена зависимость параметра P иммерсионной линзы (рисунок 5), определенная в параксиальном приближении [6]. Кривая 2 (рисунок 4) демонстрирует результаты использования предлагаемого численного метода определения условий геометрической фокусировки. Численное моделирование показало, что, во-первых, иммерсионная линза также обеспечивает второй

порядок геометрической фокусировки и, во-вторых, параксиальное приближение дает заниженное значение фокусного расстояния.

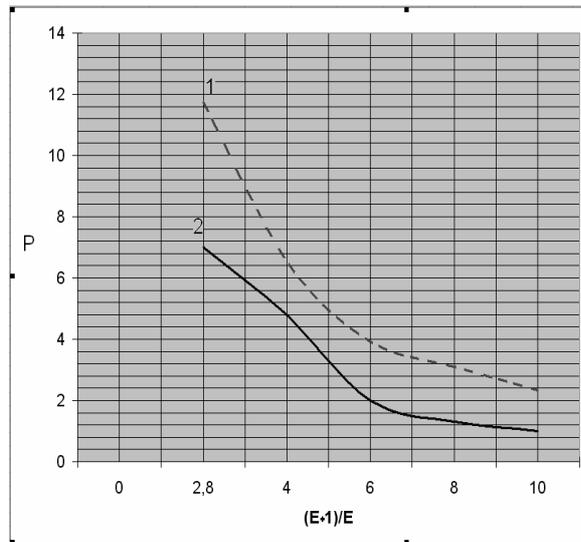


Рисунок 4 - Зависимость параметра P иммерсионной линзы

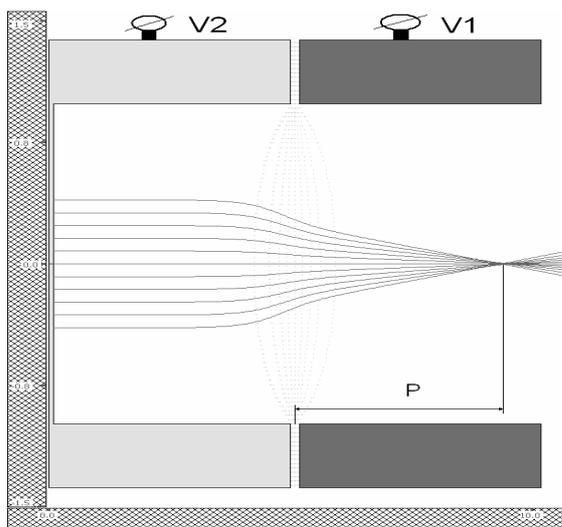


Рисунок 5 - Результаты траекторного анализа иммерсионной линзы. Потенциалы $V_1=0$, $V_2=1$

Отличия аналитических и численно определенных зависимостей на рисунке 2 и рисунке 4 связаны, во-первых, с низкой точностью параксиальных приближений (бесконечно тонкие электронные пучки) и, во-вторых, с тем, что при четных порядках фокусировки точка наилучшей фокусировки (точка фокуса) не совпадает с наименьшим сечением пучка и располагается далее от него. В параксиальном приближении оценка фокусного расстояния проводится относительно сечения наименьшего диаметра.

Заключение. Предложен корреляционный метод оценивания порядка пространственной фокусировки при численном анализе электронно-оптических систем, и проведено его сравнение с аналитическими методами параксиальной оптики на системах, допускающих аналитические решения.

Библиографический список

1. Горелик В.А., Протопопов О.Д., Трубицын А.А. // ЖТФ. 1988. Т.58. Вып. 8. С.1531-1534.
2. Трубицын А.А. Корреляционный метод поиска угловой фокусировки высших порядков // ЖТФ.-2001.- Т.71, вып.5. - С. 126-127.
3. Справочник по специальным функциям / под ред. А. Абрамовица, И. Стиган./ пер. с англ. ; Под ред. В.А. Диткина, Л.Н. Карамзиной. - М.: Наука, 1979.
4. Бендат Дж., Пирсол А. Применения корреляционного и спектрального анализа. - М.: Мир, 1983.
5. Силады М. Электронная и ионная оптика. -М.: Мир, 1990.
6. Молоковский С.И., Сушков А.Д. Интенсивные электронные и ионные пучки. - Л.: Энергия, 1972.